

4332

Skriv på formen $a + bi$

a) $e^{\frac{3\pi}{4}i}$

b) e^{2-3i}

Definitionen $e^{iv} = \cos v + i \sin v$ ger

a) $e^{\frac{3\pi}{4}i} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $e^{2-3i} = e^2 \cdot e^{-3i} = e^2 (\cos(-3) + i \sin(-3)) = e^2 (\cos 3 - i \sin 3) = e^2 \cos 3 - i e^2 \sin 3 \approx -7,32 - 1,04i$

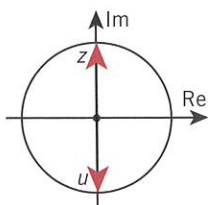
4333

Finn något värde på z sådant att $e^z = -2$.Med $z = x + iy$ kan ekvationen skrivas $e^x \cdot e^{iy} = 2 \cdot e^{i\pi}$ De båda leden är lika om $e^x = 2$ och $y = \pi + n \cdot 2\pi$ $e^x = 2$ ger $x = \ln 2$ och $n = 0$ ger $y = \pi$ En lösning till ekvationen är $z = \ln 2 + \pi i$

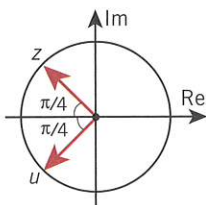
4334 Figuren visar en cirkel med radien 5.

aSkriv talen z och u på formen $r \cdot e^{iv}$, $0 \leq v < 2\pi$

a)



b)



4335 Skriv med Eulers formel

a) i b) -2 c) $-3i$ d) $1 + i$

4336 Skriv på formen $a + bi$

a) $e^{\pi i}$ b) $e^{2\pi i}$ c) $e^{-3 + \frac{\pi}{3}i}$ d) e^{1+i}

4337 Bestäm $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ om

$z = 6 \cdot e^{\frac{\pi i}{3}}$

4338 Ekvationen $z^3 = -i$ har en rot $z = i$.

a) Verifiera detta.

b) Ange samtliga rötter på formen $r \cdot e^{iv}$ 4339 Skriv talet $\sqrt{3} + i$ på formen**b**

a) re^{iv}

b) e^z

4340 Undersök om din räknare kan räkna med komplexa tal på formen $r \cdot e^{iv}$. Beräkna sedan

a) $3e^{i\pi/3} \cdot 5e^{i\pi/5}$ b) $(7e^{i\pi/4})^{12}$

4341 Exponentialfunktionen e^z skrivs ofta $\exp(z)$. Visa att**c**

a) $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$

b) $\exp\left(\frac{2 + \pi i}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} (1 + i)$

4342 Bestäm alla z sådana att

a) $e^z = i$

b) $e^z = 1 + i$

4343 Bevisa följande formler av Euler, där v är ett reellt tal.

a) $\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \cos v$ b) $\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \sin v$

Historik

Euler – en produktiv matematiker

Leonard Euler (1707–1783) var en matematiker från Schweiz som var mycket produktiv. Han skrev över 900 artiklar och trots att han under de senaste 17 åren av sitt liv var blind fortsatte han att producera ny matematik. Euler var elev till Johann Bernoulli (1667–1748), som är en annan känd matematiker från Schweiz.

Ett av Eulers mest kända verk heter "Introductio in analysin infinitorum" som utkom 1748. I detta verk definierar Euler begreppet funktion av en variabel och introducerar många beteckningar inom matematiken som används fortfarande idag, t ex e , π , $\sin$ och $\cos$. Det var även Euler som införde beteckningen i för $\sqrt{-1}$, men det var inte förrän 1777.

Vi har på sidan 209 presenterat Eulers formel $e^{iv} = \cos v + i \sin v$

som är ett samband mellan de trigonometriska funktionerna och exponentialfunktionen. Vi vet sedan tidigare att argumenten för komplexa tal adderas vid multiplikation och subtraheras vid division. Detta gäller även för komplexa tal uttryckta som exponentialuttryck:

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i\alpha-i\beta} = e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$(e^{i\alpha})^n = e^{ina}$$

Den sista formeln känner vi igen som de Moivres formel (n är ett heltal).

Ur Eulers formel följer en av de mest berömda formlerna inom matematiken

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

som i en omröstning i en matematisk tidskrift blev utsedd till världens vackraste formel. Det fantastiska med formeln är att den inkluderar så många olika delar av matematiken: e från analysen, π från geometrin, i från komplexa talen och 1 från aritmetiken.

Euler levde under en tid då matematiken ännu inte var helt rigorös, t ex var inte alla begrepp inom analysen klart definierade. Definitionerna av vissa begrepp kunde vara vaga och ibland skilja sig åt mellan olika matematiker. Analysens grundvalar behövde en upprustning men det skulle dröja en bit in på 1800-talet innan man fick ordning på detta. Dessförinnan kunde man råka ut för problem när man räknade, exempelvis kom Euler fram till följande "bevis" när han försökte få förståelse för de komplexa talen

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Idag kan vi förklara felet med detta "bevis", kan du det?

- 1 Förklara felet ovan där man "bevisat" att $-1 = 1$.
- 2 Förklara varför $e^{i\pi} + 1 = 0$ är en följd av Eulers formel.
- 3 Om $u = 4e^{i\pi/6}$ och $v = 2e^{i\pi/3}$, beräkna
 - a) $u \cdot v$
 - b) $\frac{u}{v}$
 - c) u^2
- 4 Om $z = e^{i\pi/4}$ rita z , z^2 , z^3 och z^8 i det komplexa talplanet.
- 5 Om $z = 2e^{i\pi/3}$ och $u = 3e^{i\pi/6}$, vad är då
 - a) $z\bar{u}$
 - b) $\frac{u^3}{z^2}$?
- 6 Förenkla och skriv på formen $a + bi$
 - a) $e^{1-i} \cdot e^{2+2i}$
 - b) $\frac{e^{2+\pi i/2}}{e^{1-\pi i/4}}$
- 7 Visa att $e^{2+\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}e^2(1+i\sqrt{3})$
- 8 Hur kan man ge ett rimligt värde åt
 - a) $\cos i$
 - b) $\sin i$
 - c) $\ln i$
 - d) i^i ?

