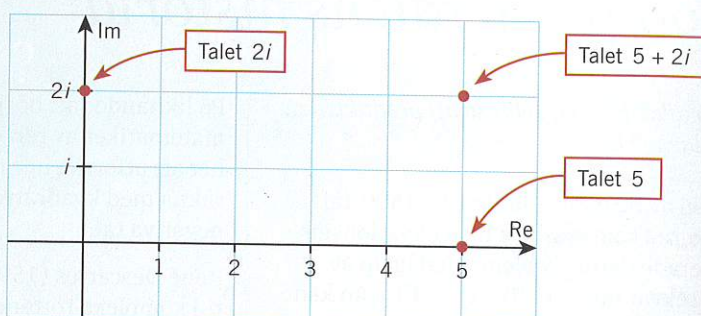


det komplexa talplanet

De komplexa talen kan grafiskt representeras som punkter i det *komplexa talplanet* som består av den *reella axeln* och den *imaginära axeln*. De reella talen återfinns på den reella axeln och de rent imaginära talen återfinns på den imaginära axeln.



4103 Bestäm realdel och imaginärdel för följande komplexa tal

a

- a) $4 + 7i$ d) $-2 + 6i$
- b) $2i$ e) 5
- c) $1 - i$ f) $2 - \sqrt{2}i$

4104 Vera påstår att 4 är ett komplext tal. Har hon rätt? Motivera.

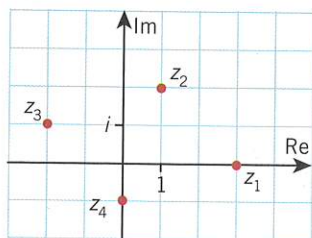
4105 Bestäm det komplexa talet z då man vet att

- a) $\operatorname{Re} z = 2$ och $\operatorname{Im} z = 3$
- b) $\operatorname{Re} z = -1$ och $\operatorname{Im} z = 4$
- c) $\operatorname{Re} z = \pi$ och $\operatorname{Im} z = 0$
- d) $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = \sqrt{3}$

4106 För vilka värden på a och b är det komplexa talet $z = a + bi$

- a) reellt b) rent imaginärt?

4107 Vilka komplexa tal är markerade i det komplexa talplanet?



4108 Markera följande komplexa tal i det komplexa talplanet

- a) $1 + 2i$ c) i
- b) -1 d) $-2 - i$

4109 Lös ekvationen

- a) $z^2 = -144$ c) $3 + z^2 = 0$
- b) $z^2 + 16 = 0$ d) $24 + z^2 = 88$

4110 Lös ekvationen och markera lösningen i det komplexa talplanet.

- a) $z^2 + 4z + 5 = 0$
- b) $z^2 + 6z + 25 = 0$
- c) $2z^2 + 40 = -8z$
- d) $2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$

4111 Lös ekvationen $(x + 1)^2 = (2x - 4)^2 + 18$

b

4112 Visa att $z = -1 + \sqrt{3}i$ är en rot till ekvationen $z^2 + 2z + 4 = 0$.

4113 Anna påstår att andragradsekvationen

$$x^2 + 4x + a = 0$$

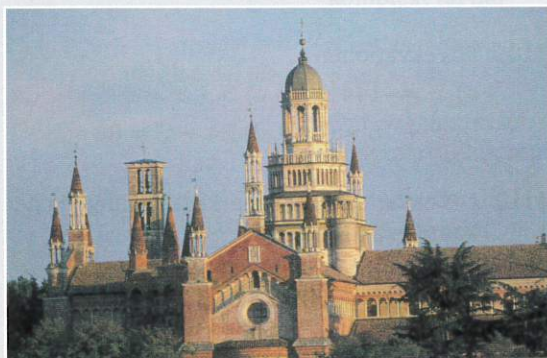
saknar reella rötter om $a > 4$. Förklara varför Annas påstående stämmer.

Historik

De komplexa talens historia

Kan vi dela talet 10 i två delar så att produkten av de båda delarna blir 40?

Cardano, en av de många italienska 1500-talsmatematikerna som sysslade med ekvationslösning, studerade detta problem. Med hjälp av andragradsekvationen $x(10-x) = 40$ som kan skrivas $x^2 - 10x + 40 = 0$ fann han "lösningarna" $5 + \sqrt{-15}$ och $5 - \sqrt{-15}$. Visserligen, menade Cardano, är dessa lösningar helt meningslösa, men de uppfyller i alla fall kravet att deras summa är 10 och att deras produkt är 40.



Cardanos födelsestad Pavia.



På liknande sätt började olika matematiker av ren nyfikenhet att utforska hur man kan räkna med kvadratroten ur negativa tal.

René Descartes (1596–1650) var motståndare till komplexa rötter och kallade dem 1637 för imaginära tal, dvs inbillade tal, ett uttryck som stannat kvar. Än idag använder vi ordet imaginär för den icke-reella delen av ett komplext tal.

Först under 1800-talet blev de komplexa talen allmänt accepterade och det blev vanligt att tolka dem som punkter i ett plan. Bland andra Carl Friedrich Gauss (1777–1855) använde komplexa tal och såg på dem på ett mer abstrakt sätt, t ex: "Vilka matematiska satser gäller om man definierar $i = \sqrt{-1}$?"

Han var också den förste som bevisade *Algebrans fundamentalsats*: "En icke-konstant polynom-ekvation med komplexa koefficienter har minst en komplex rot."

Idag bryr man sig inte så mycket om ifall tal "finns till". Om de är praktiska att räkna med så använder vi dem!

- 1 Kan vi dela 12 i två delar så att produkten av de båda delarna blir 45?
 - a) Formulera problemet som en polynom-ekvation.
 - b) Lös uppgiften med komplexa tal.
- 2 Kan vi dela 20 i två delar så att produkten av de båda delarna blir 125?
 - a) Formulera problemet som en polynomekvation.
 - b) Lös uppgiften med komplexa tal.

- 3 Ange en rot till varje polynomekvation

- a) $3xi + 5 = 0$
- b) $x^2 + 1 = 0$
- c) $x^2 + i = 0$