3138 a) $y' = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2}$

b) $y' = 2x - \dfrac{5}{x^2}$

3139 a) $y' = \dfrac{0 \cdot x^3 - 1 \cdot 3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

b) $y' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

3140 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4$

Ledtråd:

T ex $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

tabell ger $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$

3141 $y' = 3x^2 - 1 - bx^{-2}$, dvs derivatan beror av b men inte av a.

Ledtråd:

$y = x^3 - x + a + b/x$

3142 $a = 8$

Ledtråd:

Kvotregeln ger

$f'(x) = -\dfrac{a}{(x-1)^2}$

3143 a) $y' = -2x^2 \cdot e^{-2x} + 2x \cdot e^{-2x} =$

$= \dfrac{2x - 2x^2}{e^{2x}}$

Ledtråd:

$y = x^2 \cdot e^{-2x}$

b) Ja.

Motivering:

$y = f(x)/g(x) = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$

3144 *Ledtråd:*

$y' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

3145 $y = \dfrac{(8\pi - 16)x}{\pi^2} + \dfrac{8}{\pi} - 2$

Ledtråd:

$y' = \dfrac{(1 + \tan^2 x)x - \tan x}{x^2}$

$y'(\pi/4) = \dfrac{\pi/2 - 1}{(\pi/4)^2} = \dfrac{8\pi - 16}{\pi^2}$

3149 a) $y' = 1/x$

b) $y' = 4/x$

c) $y' = 1/x$

d) $y' = 4/x$

Ledtråd:

Kedjeregeln ger

$y' = \dfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3$ eller

logaritmlag ger

$y = \ln x^4 = 4 \ln x$

3150 a) $y' = 2e^{x/5}$

b) $y' = 5^x \cdot \ln 5$

c) $y' = 3\,000 \cdot 1{,}12^x \cdot \ln 1{,}12 \approx$

$\approx 340 \cdot 1{,}12^x$

d) $y' = 10^{2x} \cdot \ln 10 \cdot 2 \approx$

$\approx 4{,}60 \cdot 10^{2x}$

3151 a) $y' = \dfrac{2 \ln x}{x}$

b) $y' = 2/x$

c) $y' = 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1) =$

$= -\ln 2 \cdot 2^{-x}$

d) $y' = 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{2x}$

Ledtråd:

Skriv först om till $y = 2^{2x}$.

3152 a) $y' = -(5x+1)^{-2} \cdot 5 =$

$= -\dfrac{5}{(5x+1)^2}$

b) $y' = -\dfrac{2}{e^x}$

Ledtråd:

$y = 2e^{-x}$

c) $y' = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

Ledtråd:

$y = (\sin x)^{-1}$

d) $y' = -\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$

Lösning:

$y = (e^{2x}+1)^{-2}$

$y' = -2 \cdot (e^{2x}+1)^{-3} \cdot 2e^{2x} =$

$= -\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$

3153 a) $y' = e^{2x}\left(2 \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

b) $y' = \dfrac{e^3}{x}$

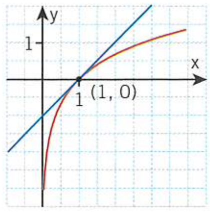
3154 Hassan har rätt.

Motivering:

$\ln ax$ har derivata

$\dfrac{1}{ax} \cdot a = \dfrac{1}{x}$

3155 $y = x - 1$



Lösning:

$y'(x) = 1/x$

$y'(1) = 1$

$y(1) = 0$

Tangentens ekvation

$y - 0 = 1(x-1)$

$y = x - 1$

3156 $f'(e) = 0$

Ledtråd:

$f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

3157 a) $N'(7) = 37{,}7$

Tolkning:

Efter sju dygn insjuknar ungefär 38 personer/dygn

Ledtråd:

Använd räknarens deriveringsverktyg eller derivera för hand.

$N'(t) = \dfrac{62\,250e^{-t}}{(1 + 249e^{-t})^2}$

b) $N''(7) = -23{,}7$

Tolkning:

Efter sju dygn minskar antalet som insjuknar varje dag med 24 (personer/dygn)/dygn

Ledtråd:

$N''(t) =$

$= \dfrac{31000500e^{-2t} - 62250e^{-t}(1 + 249e^{-t})}{(1 + 249e^{-t})^3}$

3158 a) $y' = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

eller

$y' = 2(1 + \tan^2 2x)$

b) $y' = \dfrac{2 \tan x}{\cos^2 x}$

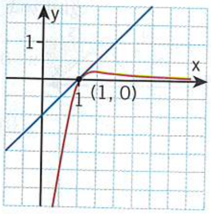
eller

$y' = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$

c) $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

d) $y' = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln x}$

3159 $y = x - 1$



Ledtråd:

$y'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

Tangentens lutning $= y'(1) = 1$

3160 $x = e^{-1/3} \approx 0{,}717$

Ledtråd:

$3x^2 \ln x + x^2 = 0$

$x^2(3\ln x + 1) = 0$

Obs, $x > 0$

3161 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Lösning:

$y = \sqrt{x}$ ger $y^2 = x$

$2y \cdot y' = 1$

$y' = 1/2y$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3162 a) *Lösning:*

$y = a^x$

$y = e^{\ln a \cdot x}$

$y' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x$

b) *Lösning:*

$y = a^x$

$\ln y = x \cdot \ln a$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = \ln a$

$y' = \ln a \cdot y = \ln a \cdot a^x$

3163 $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$

Motivering:

$y = \lg x$

$10^y = x$

$\ln 10 \cdot 10^y \cdot y' = 1$

$y' = \dfrac{1}{\ln 10 \cdot 10^y} = \dfrac{1}{\ln 10 \cdot x}$

3164 a) *Lösning:*

$VL = y^2 = \tan^2 x =$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 =$

$= HL$

b) *Lösning:*

$2yy' = \dfrac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

$y' = \dfrac{2 \sin x}{2y \cos^3 x}$

$y' = \dfrac{2 \sin x}{2 \tan x \cos^3 x} =$

$= \dfrac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x \cos^3 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3165 Nej, $y = x \cdot \ln x$ har ett minimivärde $-e^{-1} \approx -0{,}3679$.

Lösning:

Sätt $f(x) = x \cdot \ln x \quad x > 0$

$f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) = 0$

ger $\ln x = -1$ vilket ger

$x = e^{-1}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ för $x > 0$

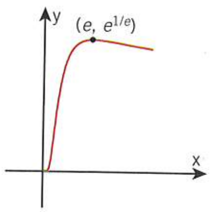
$x = e^{-1}$ ger minimivärde

$f_{\min} = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = -e^{-1} \approx$

$\approx -0{,}36787\ldots$

$x \cdot \ln x > -0{,}3675$ *gäller ej* för alla $x > 0$.

3166 Maximipunkt: $(e, e^{1/e})$



Lösning:

$y(x) = x^{1/x} = e^{\ln x \cdot 1/x}$

$y'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\dfrac{-\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\right) =$

$= x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)$

$y'(x) = 0$ då $\ln x = 1$,

dvs då $x = e$.

Maximipunkt: $(e, e^{1/e})$

3169 a) $\dfrac{dy}{dt} = \cos t - 1$

b) $\dfrac{dA}{dt} = 8r$

3170 a) $\dfrac{dr}{dt} = 0{,}075$

b) $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r$

c) $\dfrac{dA}{dt} \approx 0{,}94 \quad (2\pi \cdot 2 \cdot 0{,}075)$

Tolkning:

När radien är 2,0 m ökar arean med hastigheten 0,94 m²/s

3171 a) $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$

b) $\dfrac{dV}{dt} \approx 5$ dm³/h

Ledtråd:

$\dfrac{dV}{dt} = 3x^2 \cdot \dfrac{dx}{dt}$

Omvandla till samma längdenhet, t ex dm, dm/h

3172 a) 36 cm²/min

Ledtråd:

$A = x^2$

$\dfrac{dA}{dt} = 2x \cdot \dfrac{dx}{dt}$

c) 0,19 cm/min

Ledtråd:

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dA}{dt} \Big/ 2x$

3173 0,0074 cm/s

Ledtråd:

$\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$

3174 a) $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$

b) $\dfrac{dV}{dt} = 2\pi rh \dfrac{dr}{dt}$

c) $\dfrac{dV}{dt} = 9\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$

3175 a) Sidan är 6 cm. Volymen minskar då med 216 cm³/min.

b) Det är inte säkert att den smälter med konstant hastighet.

3176 a) Om radien minskar med Δr minskar volymen med klotets area multiplicerat med Δr. Jämför t ex med att skala bort ett tunt skal på en lök.