

4116 Beräkna

a

- a) $(2+i) + (1-i)$ c) $i - (4+3i)$
b) $(3-i) + (2i-4)$ d) $(1-i) - (4i-3)$

4117 Talen $z = 3 - 2i$ och $u = -5 + 4i$ är givna.

Beräkna

- a) $z + u$ c) $u - z$
b) $z - u$ d) $z \cdot u$

4118 Förenkla uttrycket och skriv resultatet på formen $a + bi$

- a) $(8 + 4i)^2$ d) $(-3 - 2i)^2$
b) $(2 - 5i)^2$ e) $(5 + i)(5 - i)$
c) $(-2 + 3i)^2$ f) $(-2 - i)(-2 + i)$

4119 Förenkla det komplexa talet z och ange även $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$.

- a) $z = (1 + 2i) - (2 + i)$
b) $z = 2i - (3 + 2i)$
c) $z = (1 - 3i)(2 - i)$
d) $z = (2 + i)(2 - i)$

4120 Bestäm konjugatet $\bar{z}$ och absolutbeloppet $|z|$ då

- a) $z = 4 + i$ d) $z = 2$
b) $z = 2i - 3$ e) $z = -i$
c) $z = -1 - i$ f) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$

4121 Alma har kommit fram till att för vilket komplext tal z som helst kommer $z, -z, \bar{z}$ och $-\bar{z}$ utgöra hörnen i en rektangel i det komplexa talplanet. Motivera varför Alma har rätt!

4122 Lös ekvationen, om x och y är reella tal.

- a) $2x + y + (x - y)i = 3$
b) $3x + y + (y - 4x)i = 7i$

4123 Skriv följande uttryck på formen $a + bi$

- a) $\frac{1-i}{3+2i}$ c) $\frac{2+4i}{1+3i}$
b) $\frac{5-2i}{3i}$ d) $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$

4124 Max vet att talet $z = i$ har konjugatet $\bar{z} = -i$.

Därför tror han att konjugatet till alla komplexa tal z är detsamma som $-z$.

Visa med ett exempel att han har fel.

4125 Bestäm $|z|$ om man vet att $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}$ och $\operatorname{Im} z = 3$.

4126 Ange $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ då

b

- a) $z = \frac{1+i}{1-i}$ c) $z = \frac{i}{3+i}$
b) $z = \frac{-1+3i}{2i+2}$ d) $z = -\frac{2-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+2i}$

4127 Är det sant att ett komplext tal z vars real- och imaginärdel är lika alltid ger en kvot $z/\bar{z}$ som är ett rent imaginärt tal (dvs ett tal med realdelen noll)? Motivera ditt svar.

4128 Bestäm talet $z = x + iy$ om

- a) $3\bar{z} - 2z = 1 - 10i$ c) $3z + \bar{z} = 24 - 12i$
b) $z - 5\bar{z} = 3i$ d) $3z + 2\bar{z} = 4i$

4129 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

- a) $\frac{2+i}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}$ b) $\frac{3+i}{2-i} + \frac{3-i}{2+i}$

4130 Låt $z = 3 - 4i$, $u = 8 + 15i$ och $w = 5 - 12i$.

Beräkna, dvs skriv på formen $a + bi$

- a) $z \cdot \bar{w}$ b) $(3z + u)/w$

4131 Förenkla $\frac{z^2}{i}$ om $z = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2i}{\sqrt{5}}$

4132

Bevisa att likheten gäller.

a) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

a) Vi börjar med att låta $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Då är

$$\bar{z} = a - bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Vi vill nu bevisa att vänsterledet (VL) är lika med högerledet (HL):

VL = $|z|^2 = a^2 + b^2$

HL = $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) =$
 $= a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

VL = HL

Vi har visat att både VL och HL är lika med $a^2 + b^2$. Därmed har vi bevisat att likheten är sann.b) Låt $z = a + bi$ respektive $w = c + di$, där a, b, c och d är reella tal. Då är

$$\bar{z} = a - bi$$

$$\bar{w} = c - di$$

$$z + w = a + bi + c + di =$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

Vi samlar ihop real- och imaginärdelarna var för sig.

Nu bevisar vi att VL = HL:

$$\text{VL} = \overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i =$$

$$= a + c - bi - di =$$

$$= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w} = \text{HL}$$

VSB

4133 Bestäm $z \cdot \bar{z} + |z|$ om $z = 8 - 15i$ 4134 Låt $z = 5 + 2i$ och $w = 3 - 4i$. Beräkna

a) $\text{Re}(zw)$

c) $|z + w|$

b) $\text{Im}(z^2)$

d) $|z - w|^2$

4135 Visa att om $z = -1 - 3i$ så är

 $z^3 + 3z^2 + 12z + 10 = 0$

4136 Låt $z = 2 - i$ och $w = a + bi$, där a och b är reella tal. För vilka värden på a och b ära) $z + w$ ett reellt tal större än 0?b) $z \cdot w$ rent imaginärt?4137 Låt $z = 3 - 2i$ och $w = 5 - 3i$. Skriv kvoten

$$\frac{z + 2w}{2\bar{z} - z}$$
 på formen $a + bi$.

4138 Låt $z = 2 - 3i$ och visa att

$$\text{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

4139 Visa att $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ för $z = 5 - 2i$.

Bevisa att likheterna gäller.

4140 a) $\bar{\bar{z}} = z$

c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

b) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

4141 a) $|z| = |\bar{z}|$

c) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

b) $|zw| = |z| \cdot |w|$

d) $\text{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$