

1. Bestäm $|z|$ om $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i$. Svara exakt.
2. Bestäm $|z|$ om $z = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + (-1 + \sqrt{2})i$. Svara exakt.
3. Förenkla uttrycket $(-1 + i\sqrt{3})^3$ så långt som möjligt.
4. Förenkla uttrycket $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^3$ så långt som möjligt.
5. Förenkla uttrycket $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ så långt som möjligt.
6. Skriv talet $(2 - i)^{-3}$ på formen $a + bi$.
7. Förenkla uttrycket $(1 - 2i)^2 \cdot \left(\frac{4}{1 - i} + \frac{2}{(1 - i)^2}\right)$ så långt som möjligt.
8. Förenkla uttrycket $z^2 + \bar{z}^2 + |z|^2$ så långt som möjligt då $z = 1 + 2i$.
9. Bestäm $\bar{z}$ och $|z|$ då $z = \left(\frac{1 + 2i}{1 - i}\right)^2$.
10. Bestäm två olika icke-reella tal vars produkt är $-2 + 2i$
(Nationellt prov, kurs E, ht 1998)
11. Bestäm två olika icke-reella tal vars produkt är $-5 + 5i$.
12. Bestäm två olika icke-reella tal vars produkt är $3 - 2i$.
13. Beräkna $(\bar{z})^4$ då $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Svara på formen $a + bi$.
14. Beräkna det exakta värdet av $\left(\frac{i - 1}{2}\right)^{16}$ utan att använda de Moivres formel.
15. Beräkna absoluta beloppet av $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2$ då $z_1 = 1 - i$ och $z_2 = -4 + 2i$.
16. Förenkla uttrycket $\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right)$ så långt som möjligt då $z = \sqrt{3} - 3i$.
17. Visa att formeln $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ gäller för ett godtyckligt tal z .
18. Visa att formeln $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ gäller för ett godtyckligt tal z .
19. Visa att formeln $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ gäller för ett godtyckligt tal z .

20. Visa att formeln $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ gäller för de komplexa talen $z_1 = 3 + 4i$ och $z_2 = 2 - i$.
21. Lös nedanstående problem.
- a) Välj två komplexa tal z och w sådana att $\operatorname{Im} z \neq 0$ och $\operatorname{Im} w \neq 0$.
Visa att sambandet $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ gäller för de komplexa tal du valt.
- b) Visa att sambandet $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ gäller för alla komplexa tal.
(Nationellt prov, kurs E, vt 1998)
22. Välj två komplexa tal z och w sådana att $\operatorname{Im} z \neq 0$ och $\operatorname{Im} w \neq 0$.
- a) Visa att sambandet $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ gäller för det komplexa tal du valt.
- b) Visa att sambandet $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ gäller för alla komplexa tal (w får inte vara 0).
23. För godtyckliga komplexa tal z och w gäller sambanden $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ och $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, där w inte får vara 0.
- a) Skriv talet $z_1 = \frac{(5-2i)(1+i)}{(1-2i)(2-2i)}$ på formen $a + bi$.
- b) Använd sambanden ovan och resultatet från a-uppgiften för att beräkna talet $z_2 = \frac{(5+2i)(1-i)}{(1+2i)(2-2i)}$ utan att göra några räkningar.
24. För godtyckliga komplexa tal z och w gäller sambanden $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ och $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, där w inte får vara 0.
- a) Skriv talet $z_1 = \frac{2i(10-50i)}{(10+20i)(2-2i)}$ på formen $a + bi$.
- b) Använd sambanden ovan och resultatet från a-uppgiften för att beräkna talet $z_2 = \frac{-2i(10+50i)}{(10-20i)(2+2i)}$ utan att göra några räkningar.
25. Visa att formeln $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ gäller för de komplexa talen $z_1 = 4 - i$ och $z_2 = 2 + 3i$.
Exakta räkningar skall utföras.
26. Visa att formeln $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ gäller för de komplexa talen $z_1 = 5 + 12i$ och $z_2 = 4 - i$. Exakta räkningar skall utföras.
27. Visa att $\frac{1}{z} = \overline{z}$ för alla z som uppfyller villkoret $|z| = 1$.

28. För vilket värde på det reella talet t blir $z = (1+t)(1+i) - t(1-2i)$ reellt?
(Nationellt prov, kurs E, ht 1996)
29. Bestäm det reella talet A så att talet $z = (1+2Ai)(1-i) - (2-3i) \cdot A$ blir ett reellt tal.
30. Bestäm det reella talet s så att talet $z = (s-i)(s-2i) - (5+s)(1-i)$ blir ett reellt tal.
Bestäm också z för detta s -värde.
31. Bestäm det reella talet t så att talet $z = 2t(2-i)^2 - (t+2i)(3-4i)$ blir rent imaginärt.
32. Bestäm det reella talet t i $z = -\frac{2t}{i} + (t-i)^2 \cdot i$ så att $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.
33. För det komplexa talet $z = a+bi$ gäller att $\bar{z} = z^2$
För vilka talpar a och b är villkoret uppfyllt?
(Nationellt prov, kurs E, vt 1997)
34. För det komplexa talet $z = a+bi$ gäller att $z = (\bar{z})^2$
För vilka talpar a och b är villkoret uppfyllt?
35. För det komplexa talet $z = a+bi$ gäller att $2z + \bar{z} = z^2$
För vilka talpar a och b är villkoret uppfyllt?
36. För ett komplext tal z gäller att $\operatorname{Re} z = 5$.
Vilka värden kan $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ anta?
(Nationellt prov, kurs E, vt 1997)
37. För ett komplext tal z gäller att $\operatorname{Re} z = 8$.
Vilka värden kan $\operatorname{Re}\left(\frac{2}{z}\right)$ anta?
38. För ett komplext tal z gäller att $\operatorname{Im} z = -6$.
Vilka värden kan $\operatorname{Im}\left(\frac{9}{z}\right)$ anta?
39. Förenkla uttrycket $10\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8 - 5\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6$ så långt som möjligt.
40. Bestäm arean av den triangel vars hörn i det komplexa talplanet är de tre punkterna $3+2i$, $-3+3i$ och $-1-3i$.
41. Lös nedanstående problem.
- Rita ett komplext talplan och markera talet $z_1 = 3+4i$.
 - Talen z_1 och iz_1 bildar tillsammans med origo en triangel.
Bestäm triangelns area.
 - Ge ett allmänt uttryck i a och b för arean hos den triangel som bildas av talen z , iz och origo om $z = a+bi$.
(Nationellt prov, kurs E, ht 1997)

42. Man har det komplexa talet $z = -5 + 12i$
- Rita ett komplext talplan och markera talet z .
 - Talen z och iz bildar tillsammans med origo en triangel. Bestäm triangelns area.
 - Ge ett allmänt uttryck i a och b för arean hos den triangel som bildas av talen z , iz och origo om $z = a + bi$.
43. Man har det komplexa talet $z = 5 + 12i$
- Rita ett komplext talplan och markera talet z .
 - Talen z och $-iz$ bildar tillsammans med origo en triangel. Bestäm triangelns area.
 - Ge ett allmänt uttryck i a och b för arean hos den triangel som bildas av talen z , $-iz$ och origo om $z = a + bi$.
44. Lös nedanstående problem.
- Rita ett komplext talplan och markera talet $z_1 = -4 + 3i$
Endast svar fordras.
 - Punkterna som representerar z_1 och $\bar{z}_1$ utgör tillsammans med origo hörn i en triangel. Bestäm triangelns area.
 - Ge ett allmänt uttryck i a och b för arean hos den triangel som bildas av z , $\bar{z}$ och origo om $z = a + bi$
(Nationellt prov, kurs E, ht 1998)
45. Lös nedanstående problem.
- Rita ett komplext talplan och markera talet $z_1 = 5 - 2i$
Endast svar fordras.
 - Punkterna som representerar z_1 och $\bar{z}_1$ utgör tillsammans med den punkt som representerar talet $z_2 = -2i$ hörn i en triangel. Bestäm triangelns area.
 - Ge ett allmänt uttryck i a och b för arean hos den triangel som bildas av z_1 och $\bar{z}_1$, där $z_1 = a + bi$, samt talet $z_2 = bi$.
46. Lös nedanstående problem.
- Rita ett komplext talplan och markera talet $z_1 = -5 - 2i$
Endast svar fordras.
 - Origo, punkten som representerar talet z_1 och den punkt som representerar talet $z_2 = -10$ utgör hörn i en triangel. Bestäm triangelns area.
 - Ge ett allmänt uttryck i a och b för arean hos den triangel som har ett hörn i origo och de andra hörnen i de punkter som representeras av talen $z_1 = a + bi$ och $z_2 = 2a$.

47. I det komplexa talet $z = 2 + (a^2 - 1)i$ är konstanten a ett reellt tal som uppfyller villkoret att $a > 1$.

a) Ange $\bar{z}$.

b) Bestäm konstanten a så att avståndet mellan talen z och $\bar{z}$ i det komplexa talplanet är 20 le. Svara exakt.

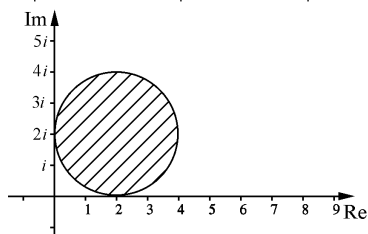
48. Bestäm värdet på den reella konstanten a så att avståndet i det komplexa talplanet mellan talen $-1 + 3i$ och $5 + ai$ är 10 le.

49. Markera de punkter i det komplexa talplanet som uppfyller villkoret $|z + i| = |z - 3i|$.

50. Markera de punkter i det komplexa talplanet som uppfyller villkoret $|z - 5| = |z - 5i|$.

51. Betrakta det streckade området i figuren. Vilken av följande olikheter beskriver området?

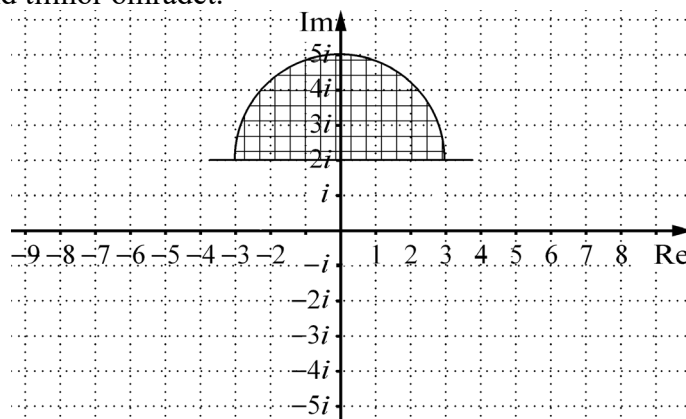
a) $|z - 2i| \leq 2$ b) $|z - 2 - 2i| \leq 2$ c) $|z - 2| \leq 2$ d) $|z - 2 - 2i| \geq 2$



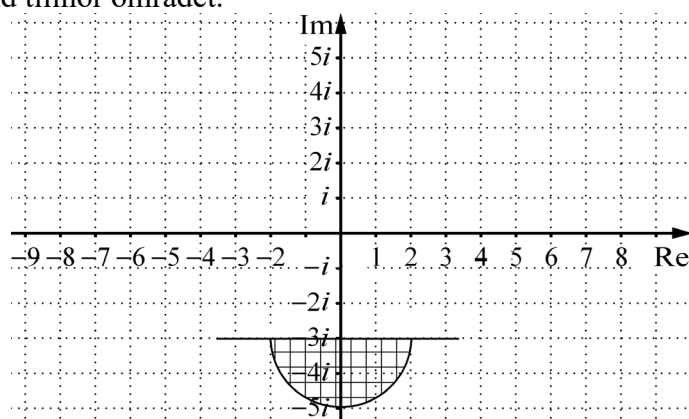
52. Markera i det komplexa talplanet de punkter, som uppfyller olikheten $1 \leq |z - 2 - 2i| \leq 3$.

53. Markera i det komplexa talplanet de punkter, som uppfyller olikheten $2 \leq |z + 1 - 2i| \leq 4$.

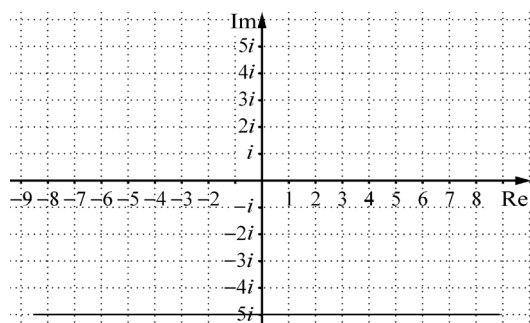
54. Ett område i det komplexa talplanet begränsas av en halvcirkelbåge och en linje enligt figur. Beskriv med olikheter de villkor som gäller för de tal z som ligger i området. Områdets rand tillhör området.



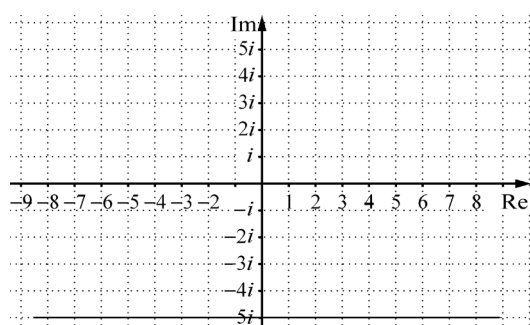
55. Ett område i det komplexa talplanet begränsas av en halvcirkelbåge och en linje enligt figur. Beskriv med olikheter de villkor som gäller för de tal z som ligger i området. Områdets rand tillhör området.



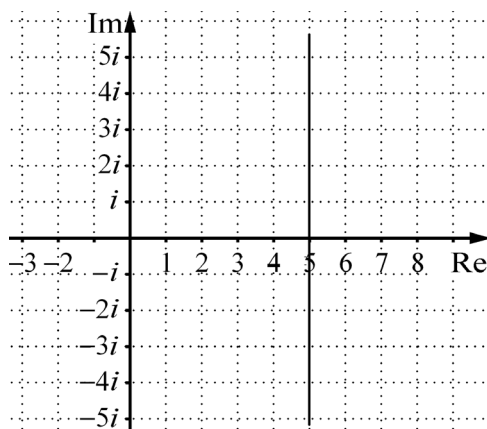
56. Linjen i det komplexa talplanet nedan representerar alla möjliga lägen för talet z i denna uppgift. Undersök vilka värden som realdelen för $z^2 + 100$ kan anta. För att få full poäng i bedömningen skall generell metod användas i lösningen.



57. Linjen i det komplexa talplanet nedan representerar alla möjliga lägen för talet z i denna uppgift. Undersök vilka värden som imaginärdelen för $i \cdot (z^2 - 2)$ kan anta. För att få full poäng i bedömningen skall generell metod användas i lösningen.

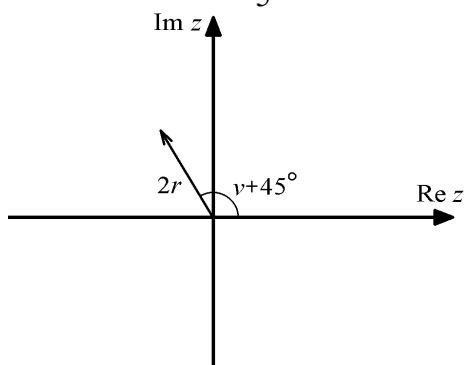


58. Linjen i det komplexa talplanet nedan representerar alla möjliga lägen för talet z i denna uppgift. Undersök vilka värden som imaginärdelen för iz^2 kan anta. För att få full poäng i bedömningen skall generell metod användas i lösningen.

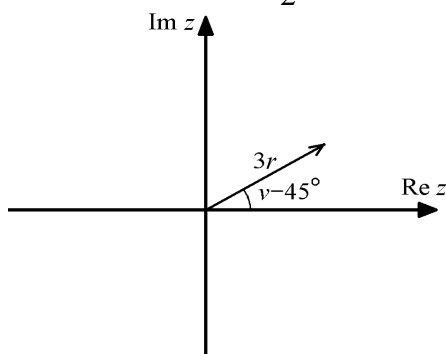


59. Om den reella variabeln u ges ett värde får variabeln $z = u + (4 - u)i$ ett komplext värde. Tilldela u några värden och markera de tal z som bildas i det komplexa talplanet. Dra en slutsats om belägenheten av alla de komplexa tal som kan bildas och bestäm ett samband mellan talens realdel och imaginärdel.
60. Om den reella variabeln u ges ett värde får variabeln $z = 2u + (u - 2)i$ ett komplext värde. Tilldela u några värden och markera de tal z som bildas i det komplexa talplanet. Dra en slutsats om belägenheten av alla de komplexa tal som kan bildas och bestäm ett samband mellan talens realdel och imaginärdel.
61. Man har de komplexa talen $z_1 = 1 + i$ och $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Skriv talet $z_1 \cdot z_2$ i polär form. Svaret ges så att $0^\circ \leq \arg(z_1 \cdot z_2) \leq 360^\circ$.
62. Bestäm $\arg z$ då $z = \frac{i^3(1 - 2i)}{1 + 2i}$. Svara i grader med en decimal.
63. Bestäm $\arg z$ och $|z|$ om $z = i^4 + i^7\sqrt{3}$. Svaret ges så att $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.
64. Bestäm $\arg z$ om $z = \frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{z_1 \cdot z_2}$, $z_1 = \sqrt{3} + i$ och $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Svara exakt i radianer.
65. Bestäm absolutbelopp och argument för det komplexa talet $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$.
66. Skriv det komplexa talet $z = z_1 + z_2$ i polär form då $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ och $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. Svara exakt med argumentet i intervallet $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.
67. Skriv det komplexa talet $\frac{1}{z}$ i polär form då $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$. Svaret ges med argumentet i intervallet $0^\circ \leq \arg \frac{1}{z} \leq 360^\circ$.

68. I figuren nedan är det komplexa talet z avbildat med angivande av argument och absolutbelopp. Bestäm argument och absolutbelopp för det tal som bildas när man multiplicerar talet z med $-\frac{3}{5}$.



69. I figuren nedan är det komplexa talet z avbildat med angivande av argument och absolutbelopp. Bestäm argument och absolutbelopp för det tal som bildas när man multiplicerar talet z med $-\frac{i}{2}$.



70. En person vill osedd smyga fram mot ett mål. Vägen till målet kan beskrivas genom tre förflyttningar:
- 1) 40 m i en riktning som från öster avviker 60° mot norr.
 - 2) 30 m åt väster.
 - 3) 50 m i en riktning som från öster avviker 45° mot norr.

Lös följande problem med hjälp av dina kunskaper om komplexa tal.

Personen tänkes starta i origo. Längdenheten på varje axel får motsvara 1 m.

- a) Teckna förflyttningarna som tre komplexa tal i polär form.
 - b) Räkna ut det komplexa tal som motsvarar målets position. Svara på formen $a + bi$. Svara med heltal.
 - c) Beräkna även avståndet från startpunkten till målet.
71. Man har de komplexa talen $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ och $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Bestäm exakt talet $z_1 \cdot z_2$ a) i polär form b) på formen $a + bi$.

72. Skriv följande uttryck i polär form med svaret i enklaste form.

Argumentet ges i radianer:

$$2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

73. Bestäm konstanterna a och b så att

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{a} + i\sin\frac{2\pi}{a}\right) \cdot b\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

74. Man har de komplexa talen $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}\right)$ och

$$z_2 = \sqrt{27}\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right). \text{ Beräkna } z_1 \cdot z_2 \text{ och } \frac{z_1}{z_2}.$$

Svara i polär form med positiva argument.

75. Multiplicera talen $z_1 = 3(\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ)$ och $z_2 = 4(\cos(-32^\circ) - i\sin 32^\circ)$ med varandra och svara exakt i polär form. Förenkla så långt som möjligt.
Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

76. Multiplicera talen $z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos 102^\circ + i\sin 102^\circ)$ och $z_2 = \sqrt{8} \cdot (\cos(-32^\circ) - i\sin 32^\circ)$ med varandra och svara exakt i polär form. Förenkla så långt som möjligt.
Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

77. Multiplicera talen $z_1 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ och $z_2 = 32 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) - i\sin\frac{\pi}{15}\right)$ med varandra och svara exakt i polär form. Förenkla så långt som möjligt.
Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

78. Multiplicera talen $z_1 = \sqrt{27} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ och $z_2 = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{32} + i\sin\frac{5\pi}{32}\right)$ med varandra och svara exakt i polär form. Förenkla så långt som möjligt.
Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

79. Beräkna kvoten $\frac{4i}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$. Förenkla så långt som möjligt.

Svara på polär form.

80. Beräkna kvoten $\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ och svara exakt i polär form.

81. Beräkna kvoten $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^2}{\cos(-30^\circ) - i\sin 30^\circ}$ och svara i polär form.

82. Låt $z_1 = 1 + i$ och $z_2 = -i$

a) Skriv de båda komplexa talen på polär form.

b) Bestäm argumentet för $\frac{z_1^4}{z_2^3}$

(Nationellt prov, kurs E, ht 1997)

83. Låt $z_1 = -2 + 2i$ och $z_2 = -4$

a) Skriv de båda komplexa talen på polär form.

b) Bestäm argumentet för $\frac{z_1^3}{z_2^4}$

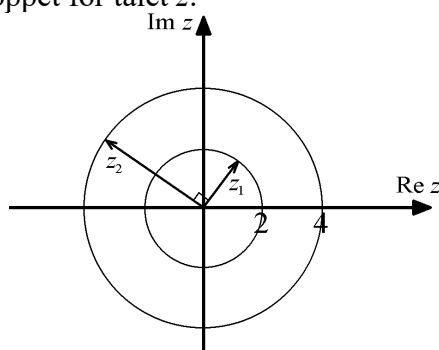
84. Låt $z_1 = -\sqrt{3} + i$ och $z_2 = -5i$

a) Skriv de båda komplexa talen på polär form.

b) Bestäm argumentet för $\frac{z_1^4}{z_2^3}$

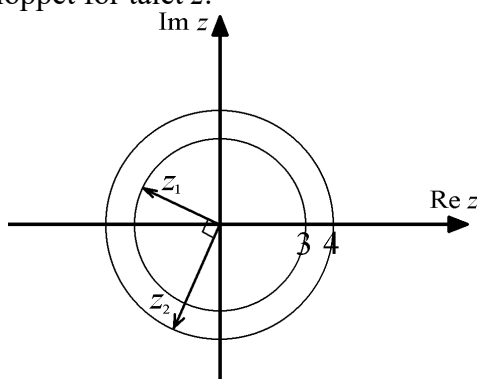
85. I figuren nedan har man ritat de komplexa talen z_1 och z_2

Bilda det komplexa talet $z = \frac{2z_2}{z_1}$. Bestäm både argumentet i grader och absolutbeloppet för talet z .



86. I figuren nedan har man ritat de komplexa talen z_1 och z_2

Bilda det komplexa talet $z = \frac{iz_2}{z_1}$. Bestäm både argumentet i radianer och absolutbeloppet för talet z .



87. Man har det komplexa talet $z = 4(\cos v + i \sin v)$. Bestäm $\arg \frac{z}{-2i}$. Svara i grader.
88. Multiplikation mellan komplexa tal sker enligt formeln
 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2))$
Beskriv med egna ord hur multiplikationen går till. Vedertagna matematiska benämningar för de i formeln ingående variablerna skall ingå i den beskrivning som utgör ditt svar.
89. Division mellan komplexa tal sker enligt formeln
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(v_1 - v_2) + i \sin(v_1 - v_2))$
Beskriv med egna ord hur divisionen går till. Vedertagna matematiska benämningar för de i formeln ingående variablerna skall ingå i den beskrivning som utgör ditt svar.
90. Talet $z = 1 + i\sqrt{3}$. Skriv talet z i polär form och bestäm sedan z^9 .
Svara på formen $a + bi$.
91. Förenkla så långt som möjligt uttrycket $(1 + i)^{10} + (1 - i)^{10}$.
92. Skriv uttrycket $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^9$ på formen $a + bi$.
93. Skriv uttrycket $\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^6$ på formen $a + bi$.
94. Skriv uttrycket $(0,950 + 0,675i)^8$ på formen $a + bi$.
95. Lös nedanstående problem.
- a) Beräkna $(2\sqrt{3} + 2i)^6$
- b) För vilka positiva heltal n gäller att $\operatorname{Re} z = 0$ då $z = (2\sqrt{3} + 2i)^n$
(Nationellt prov, kurs E, vt 1997)
96. Lös följande uppgift
- a) Beräkna $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^8$
- b) För vilka positiva heltal n gäller att $\operatorname{Re} z = 0$ då $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^n$
97. Lös följande uppgift
- a) Beräkna $(-1 + i\sqrt{3})^6$
- b) För vilka positiva heltal n gäller att $\operatorname{Im} z = 0$ då $z = (-1 + i\sqrt{3})^n$
98. Faktorisera uttrycket $z^2 + 10iz - 24$.

99. Lös ekvationen $z^2 = 4i$. Svara på formen $a + bi$
100. Lös ekvationen $z^2 = 4 + 4i\sqrt{3}$. Svara på formen $a + bi$
101. Faktorisera uttrycket $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3}$.
102. Lös fullständigt ekvationen $z^3 - i = 0$. Svara på formen $a + bi$
103. Lös fullständigt ekvationen $z^3 = -8$. Svara på formen $a + bi$
104. Lös fullständigt ekvationen $z^3 + 27 = 0$. Svara på formen $a + bi$
105. Lös fullständigt ekvationen $8z^3 = -i$. Svara på formen $a + bi$
106. Lös fullständigt ekvationen $z^4 = -4$. Svara på formen $a + bi$
107. Lös fullständigt ekvationen $z^4 = -16$. Svara på formen $a + bi$
108. Bestäm $|e^{2+i}|$.

(Nationellt prov, kurs E, ht 1997)

109. Bestäm $|e^{2-i}|$.
110. Bestäm $|e^{-2+i}|$.
111. Bestäm $|e^{-2-i}|$.
112. Skriv talet $z = \left(e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right)^2$ på formen $a + bi$.

113. Visa att $\frac{6e^{-i\pi/3}}{3e^{i\pi/3}} = -1 - i\sqrt{3}$

(Nationellt prov, kurs E, vt 1998)

114. Visa att $\frac{8e^{-5\pi i/6}}{4e^{4\pi i/3}} = \sqrt{3} - i$

115. Visa att $\frac{12e^{-i\pi/4}}{3\sqrt{2}e^{i\pi/2}} = -2 - 2i$

116. Skriv talet $z = \left(\frac{i}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \right)^3$ på formen $a + bi$. Beräkna också $\arg z$. Svara exakt.

117. Skriv talet $z = \frac{e^{3+\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{2-i\pi}{3}}}$ på formen $a + bi$. Beräkna också $|z|$ och $\arg z$. Svara exakt.

118. Man har det komplexa talet $z = e^{\frac{i\pi}{3}} - 2$. Bestäm absolutbeloppet och ett argument för z .

119. Skriv det komplexa talet $z = e^{i\frac{\pi}{3}} + 1$ på formen $a + bi$ och beräkna sedan absoluta beloppet och ett argument för z .
120. För vilka värden på k är $e^{ki\pi} + 1 = 0$?
(Nationellt prov, kurs E, vt 1999)
121. Finns det några heltalsvärden på k för vilka $e^{ki\frac{\pi}{2}} - i = 0$?
122. Finns det några heltalsvärden på k för vilka $e^{2\pi k i} + 1 = 0$?
123. Skriv om täljaren i följande uttryck på polär form, utför divisionen och ange uttrycket på formen re^{iv} :
$$\frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$
124. Skriv det komplexa talet $\sqrt{18} \cdot e^{0,75\pi i} (1 - 4i)$ på formen $a + bi$.
125. Beräkna avståndet mellan de punkter som representerar talen $e^{\frac{\pi i}{3}}$ och $e^{\frac{5\pi i}{6}}$ i det komplexa talplanet.
126. I en elektrisk seriekrets ingår tre komponenter vars sammanlagda impedans med komplex metod kan tecknas $z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$, där den imaginära enheten betecknas med j . Visa att $|z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.
127. I växelströmsläran kan spänningen i ett visst sammanhang tecknas $u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$. Inom just detta område finns en möjlighet att tillämpa räkning med komplexa tal. Visa att spänningen u med den komplexa metoden kan tecknas
$$u = \frac{\hat{U}(e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)})}{2j}, \quad \text{där } j \text{ är den imaginära enheten.}$$

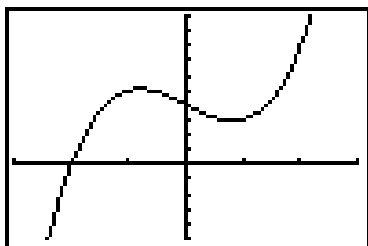
(Ledning: $e^{iv} = \cos v + i \sin v$ och $e^{-iv} = \cos v - i \sin v$.)
128. Summan av två tal är 16 och produkten av talen är 73. Bestäm de båda talen.
129. Summan av två tal är 60 och produkten av talen är 1000. Bestäm de båda talen.
130. Bestäm den reella konstanten a så att lösningen z till ekvationen $z = i(z - a) + i^2(1 - 2ai)$ blir ett reellt tal. Ange också talet z för detta a -värde.
131. När lösningarna till ekvationen $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$ anges som punkter i det komplexa talplanet kan en cirkel ritas som går genom alla punkterna.
- a) Lös ekvationen.
- b) Bestäm cirkelns radie.
(Nationellt prov, kurs E, ht 1998)

132. När lösningarna till ekvationen $z^3 - 8z^2 + 20z = 0$ anges som punkter i det komplexa talplanet kan en cirkel ritas som går genom alla punkterna.
- Lös ekvationen.
 - Bestäm cirkelns radie.
133. När lösningarna till ekvationen $z^3 + 12z^2 + 45z = 0$ anges som punkter i det komplexa talplanet kan en cirkel ritas som går genom alla punkterna.
- Lös ekvationen.
 - Bestäm cirkelns radie.
134. Ekvationen $z^2 + az + b = 0$ där a och b är reella tal har en lösning $z = 1 - 2i$.
Bestäm konstanterna a och b .
(Nationellt prov, kurs E, ht 1996)
135. Ekvationen $z^2 + az + b = 0$ där a och b är reella tal har en lösning $z = 5 + i$.
Bestäm konstanterna a och b .
136. Ekvationen $z^2 - (p - 2)z + q = 0$ där p och q är reella tal har en lösning $z = 2 - \frac{i}{2}$.
Bestäm konstanterna p och q .
137. Ekvationen $2z^2 + Az + 5 - B = 0$ där a och b är reella tal har en lösning $z = -1 - 3i$.
Bestäm konstanterna A och B .
138. Följande ekvation kan lösas genom att vänsterledet faktoriseras.
Bestäm de tre möjliga rötterna. $(z^3 + z^2) + (z + 1) = 0$
139. Följande ekvation kan lösas genom att vänsterledet faktoriseras.
Bestäm de fyra möjliga rötterna. $z(z^2 - 1) + (z^2 - 1)(z^2 + 6) = 0$
140. Bestäm konstanten a så att följande division går jämnt upp:

$$\frac{5x^5 + 5x^4 - 3ax^3 - 2x^2 - 5x + 2a}{x - 1}.$$
Bestäm också kvoten efter det att värdet på a är beräknat.
141. Bestäm konstanten a så att resten blir 3 vid division av polynomet $2x^4 - 3x^2 + a$ med $x^2 - 1$.
142. Bestäm konstanten a så att resten blir 1 vid division av polynomet $2x^4 - 16x^2 + a$ med $x^2 - 10$.
143. Bestäm konstanten a så att resten blir 10 vid division av polynomet $3x^4 - 14x^2 + a$ med $x^2 - 5$.

144. Figuren visar grafen till funktionen $y = x^3 - 2x + 4$

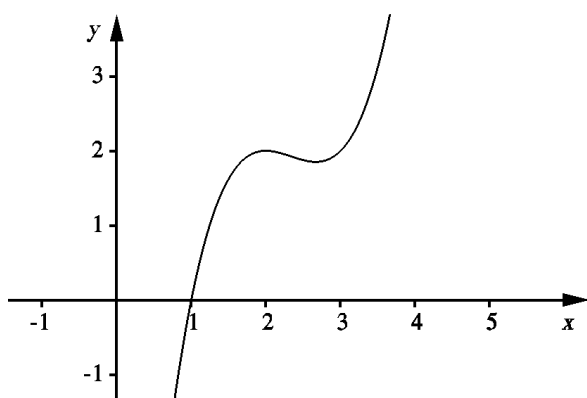
Bestäm alla rötter till ekvationen $x^3 - 2x + 4 = 0$



(Nationellt prov, kurs E, vt 1999)

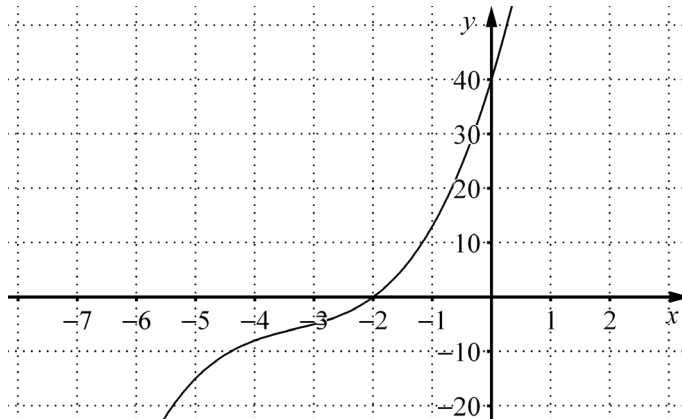
145. Figuren visar grafen till funktionen $y = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$

Bestäm alla rötter till ekvationen $x^3 - 7x^2 + 16x - 10 = 0$



146. Figuren visar grafen till funktionen $y = x^3 + 10x^2 + 36x + 40$

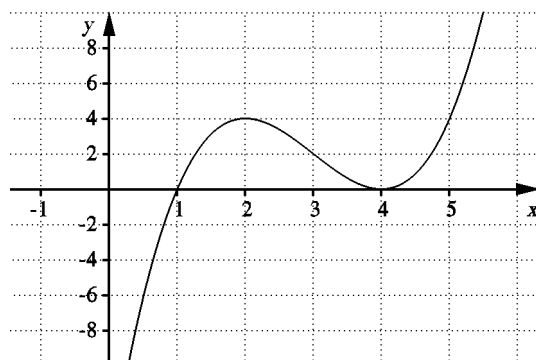
Bestäm alla rötter till ekvationen $x^3 + 10x^2 + 36x + 40 = 0$



147. Figuren visar grafen till funktionen $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$.

Man kan se att kurvan tangerar x -axeln i en punkt.

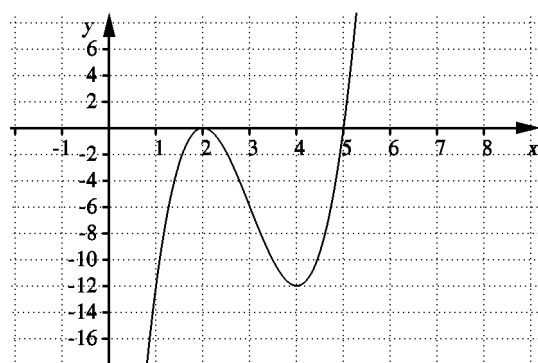
Visa att detta motsvarar att ekvationen $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$ har en dubbelrot.



148. Figuren visar grafen till funktionen $y = 3x^3 - 27x^2 + 72x - 60$.

Man kan se att kurvan tangerar x -axeln i en punkt.

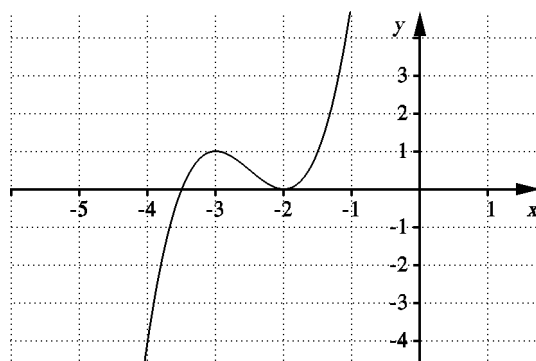
Visa att detta motsvarar att ekvationen $3x^3 - 27x^2 + 72x - 60 = 0$ har en dubbelrot.



149. Figuren visar grafen till funktionen $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 28$.

Man kan se att kurvan tangerar x -axeln i en punkt.

Visa att detta motsvarar att ekvationen $2x^3 + 15x^2 + 36x + 28 = 0$ har en dubbelrot.



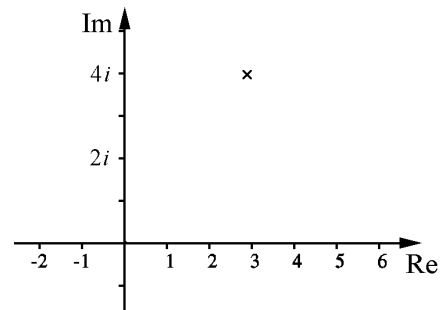
150. Ekvationen $6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$ har rötterna $x = -2$ och $x = 3$. Bestäm ekvationens övriga rötter med algebraisk metod och svara exakt.

151. Ekvationen $7x^4 - 50x^3 + 50x - 7 = 0$ har rötterna $x = 1$ och $x = -1$. Bestäm ekvationens övriga rötter med algebraisk metod och svara exakt.
152. Ekvationen $18x^4 - 33x^3 - 19x^2 + 28x - 4 = 0$ har rötterna $x = 2$ och $x = -1$. Bestäm ekvationens övriga rötter med algebraisk metod och svara exakt.
153. Ekvationen $z^3 - z^2 + Cz + D = 0$ har de två rötterna $z_1 = 2i$ och $z_2 = -2i$. C och D är reella tal.
- Bestäm konstanterna C och D .
 - Har ekvationen ytterligare en eller flera rötter? Motivera ditt svar. Bestäm i så fall denna rot/dessa rötter.
154. Ekvationen $z^3 + Bz^2 + Cz - 20 = 0$ har de två rötterna $z_1 = 2i$ och $z_2 = -2i$. B och C är reella tal.
- Bestäm konstanterna B och C .
 - Har ekvationen ytterligare en eller flera rötter? Motivera ditt svar. Bestäm i så fall denna rot/dessa rötter.
155. Ekvationen $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$ har rötterna $x = 1$ och $x = -1$. Bestäm övriga rötter till ekvationen.
156. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20 = 0$ har rötterna $z = 2i$ och $z = -2i$. Bestäm övriga rötter till ekvationen.
157. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 19z^2 - 18z + 90 = 0$ har rötterna $z = 3i$ och $z = -3i$. Bestäm övriga rötter till ekvationen.
158. Ange en polynomekvation $p(x) = 0$ av fjärde graden som uppfyller följande villkor:
- Ekvationen skall ha två reella rötter och två rent imaginära rötter.
 - Polynomet skall bara ha reella koefficienter.

F A C I T

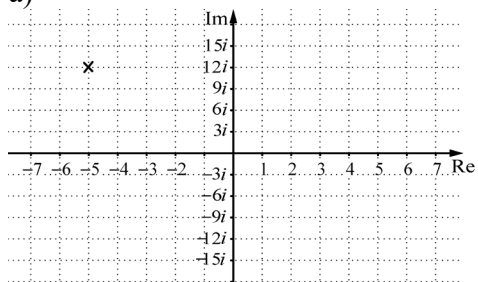
1. $\sqrt{2}$
2. $2 - \sqrt{2}$
3. 8
4. i
5. -1
6. $\frac{2}{125} + \frac{11}{125}i$
7. $6 - 17i$
8. -1
9. $\bar{z} = -2 + \frac{3}{2}i, |z| = \frac{5}{2}$
10. Exempel: i och $(2 + 2i)$
11. Exempel: i och $(5 + 5i)$
12. Exempel: i och $(-2 - 3i)$
13. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
14. $\frac{1}{256}$
15. 12
16. $-\frac{1}{2}$
17. ---
18. ---
19. ---
20. $VL = HL = 10 - 5i$
21. a) --- b) ---
22. a) --- b) ---
23. a) $z_1 = -\frac{4}{5} + \frac{9}{10}i$ b) $z_2 = -\frac{4}{5} - \frac{9}{10}i$
24. a) $z_1 = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$ b) $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$
25. $VL = HL = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$

26. $VL = HL = 13\sqrt{17}$
27. ---
28. $t = -1/3$
29. $A = 0,2$
30. $s = 2,5, z = -3,25$
31. $t = \frac{8}{3}$
32. ± 1
33. $(0,0); (1,0);$
 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
34. $(0, 0), (1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
35. $(0, 0), (3, 0)$
36. $0 < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{5}$
37. $0 < \operatorname{Re}\left(\frac{2}{z}\right) \leq \frac{1}{4}$
38. $0 < \operatorname{Im}\left(\frac{9}{z}\right) \leq \frac{3}{2}$
39. 15
40. 17 ae
41. a)



- b) $25/2$ a.e.
- c) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ a.e.

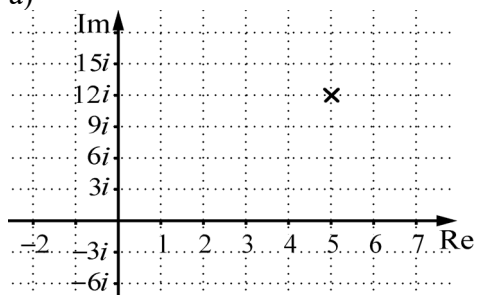
42. a)



b) 84,5 a.e.

c) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ a.e.

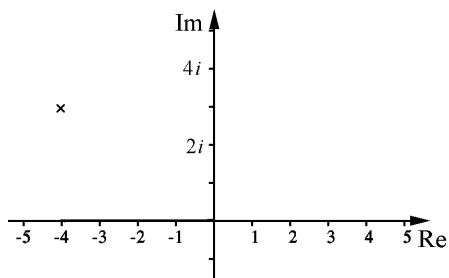
43. a)



b) 84,5 a.e.

c) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ a.e.

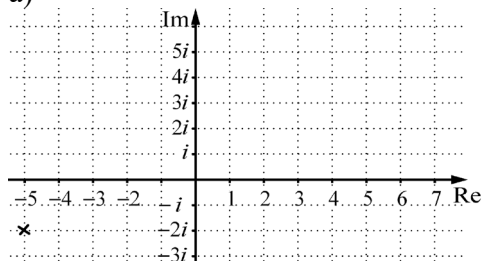
44. a)



b) 12 ae

c) $|a| \cdot |b|$ (eller $|ab|$)

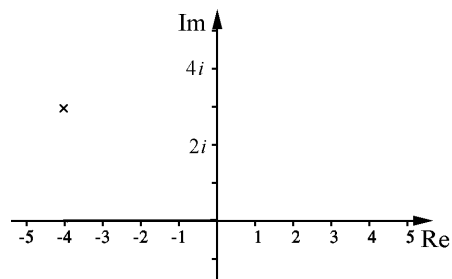
45. a)



b) 10 ae

c) $|a| \cdot |b|$ (eller $|ab|$)

46. a)



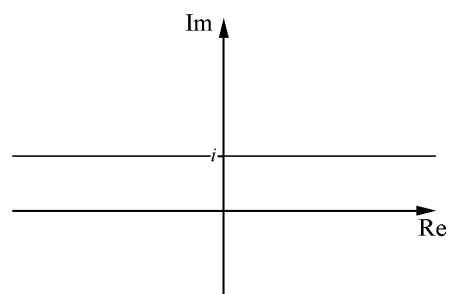
b) 10 ae

c) $|a| \cdot |b|$ (eller $|ab|$)

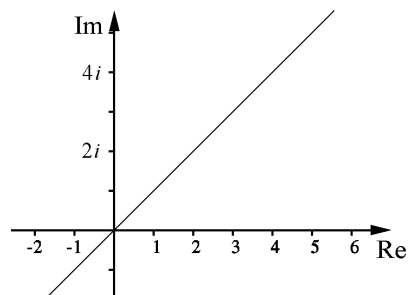
47. a) $\bar{z} = 2 - (a^2 - 1)i$ b) $a = \sqrt{11}$

48. $a_1 = 11$ eller $a_2 = -5$

49.

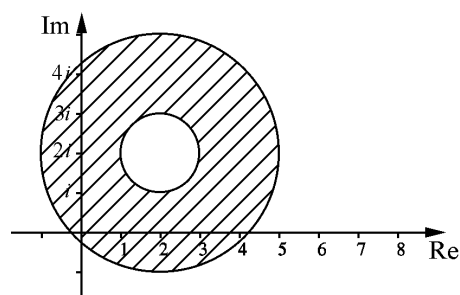


50.

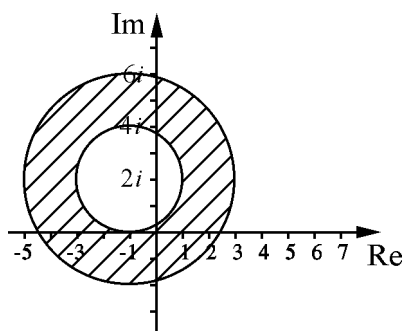


51. b

52.



53.



54. $|z - 2i| \leq 3, \operatorname{Im} z \geq 2$

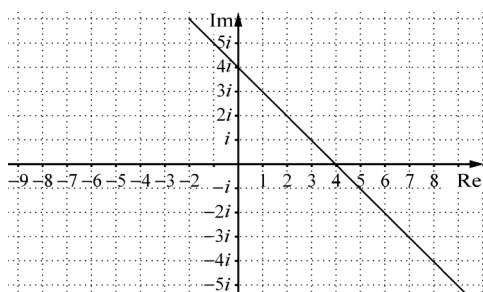
55. $|z + 3i| \leq 2, \operatorname{Im} z \leq -3$

56. $\operatorname{Re}(z^2 + 100) \geq 75$

57. $\operatorname{Im} i(z^2 - 2) \geq -27$

58. $\operatorname{Im} iz^2 \leq 25$

59. Punkterna ligger på en rät linje.
Sambandet är att $\operatorname{Im} z = 4 - \operatorname{Re} z$
vilket motsvarar att om $z = x + iy$
ligger på linjen, så gäller att $y = 4 - x$
Se diagrammet nedan.



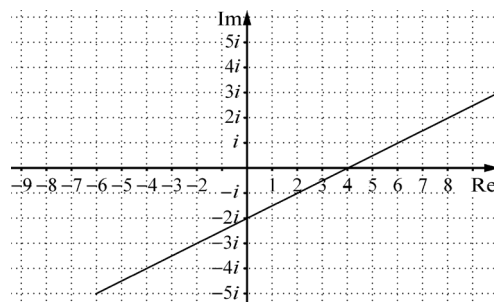
60. Punkterna ligger på en rät linje.

Sambandet är att $\operatorname{Im} z = \frac{\operatorname{Re} z}{2} - 2$,

vilket motsvarar att om $z = x + iy$

ligger på linjen, så gäller att $y = \frac{x}{2} - 2$

Se diagrammet nedan.



61. $2\sqrt{2}(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ)$

62. $\arg z = 143,1^\circ$

63. $\arg z = \frac{5\pi}{3}$ och $|z| = 2$

64. $\arg z = \frac{\pi}{3}$

65. $\arg z = \frac{\pi}{2}$ och $|z| = \sqrt{3}$

66. $z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$

67. $2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$

68. Argumentet blir $v + 225^\circ$
(även $v - 135^\circ$)

Absolutbeloppet blir $\frac{6r}{5}$

69. Argumentet blir $v + 225^\circ$
(även $v - 135^\circ$)

Absolutbeloppet blir $\frac{3r}{2}$

70. a) $\begin{cases} 1) 40(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ 2) -30, 3) 50(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \end{cases}$
b) $25 + 70i$ c) 74 m

71. a) $10\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$

b) $-5\sqrt{3} - 5i$

72. $2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

73. $a = 6, \quad b = \sqrt{3}$

74. $z_1 \cdot z_2 = 9(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{13\pi}{7} + i\sin\frac{13\pi}{7}\right)$$

75. $12(\cos 4^\circ + i\sin 4^\circ)$. Använda satser:
 $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ och
 $\sin(-v) = -\sin v$ bör nämnas.

76. $4(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ)$. Använda
satser: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
och $\sin(-v) = -\sin v$ bör nämnas.

77. $8 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{60} + i\sin\frac{\pi}{60}\right)$. Använda
satser: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
och $\sin(-v) = -\sin v$ bör nämnas.

78. $9 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{32} + i\sin\frac{\pi}{32}\right)$. Använda
satser: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
och $\sin(-v) = -\sin v$ bör nämnas.

79. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

80. $\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$

81. $4(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$

82. a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

och

$$z_2 = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

b) $\arg\left(\frac{z_1^4}{z_2^3}\right) = \frac{\pi}{2}$

(kan också ges i grader)

83. a) $z_1 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$z_2 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

b) $\pi/4$

(kan också ges i grader)

84. a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$z_2 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

b) $5\pi/6$

85. Absolutbeloppet är 4 och argumentet
är 90° .

86. Absolutbeloppet är $4/3$ och
argumentet är π .

87. $v - 270^\circ$

88. Lokal bedömning. Uttrycken polär
form, argumentet och absolutbelopp
bör finnas i svaret.

89. Lokal bedömning. Uttrycken polär
form, argumentet och absolutbelopp
bör finnas i svaret.

90. -512

91. 0

92. 1

93. $8i$

94. $0,774 - 3,31i$

95. a) -4096

b) $n = 3, 9, 15, 21, \dots$

96. a) 1

b) $n = 2, 6, 10, \dots$

97. a) 64

b) $n = 3, 6, 9, \dots$

98. $(z + 4i)(z + 6i)$

99. $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

100. $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$

101. $(z + 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3})$

102. $z = -i, \quad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

103. $z = -2, z = 1 \pm i\sqrt{3}$
104. $z = -3, z = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
105. $z = \frac{i}{2}, z = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$
106. $z = 1 \pm i, z = -1 \pm i$
107. $z = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}, z = -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$
108. $|e^{2+i}| = e^2$
109. $|e^{2-i}| = e^2$
110. $|e^{-2+i}| = e^{-2}$
111. $|e^{-2-i}| = e^{-2}$
112. ---
113. ---
114. ---
115. ---
116. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \arg z = \frac{3\pi}{4}$
117. $z = -\frac{e\sqrt{3}}{2} + \frac{e}{2} \cdot i, |z| = e, \arg z = \frac{5\pi}{6}$
118. $|z| = \sqrt{3}, \arg z = \frac{5\pi}{6}$
119. $z = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, |z| = \sqrt{3}, \arg z = \frac{\pi}{6}$
120. Då k är udda.
121. $k = 1 + 4n$, där n är ett heltal
122. Nej. ($k = 0,5 + n$, där n är ett heltal)
123. $3 \cdot e^{i \cdot 5\pi/12}$
124. $9 + 15i$
125. $\sqrt{2} \text{ le}$
126. ---
127. ---
128. $8 + 3i, 8 - 3i$

129. $30 + 10i, 30 - 10i$
130. $a = 1, z = -1$
131. a)
$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 + i \\ z_3 = 2 - i \end{cases}$$

b) 1,25
132. a) Ekvationens rötter
$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = -4 + 2i \\ z_3 = -4 - 2i \end{cases}$$

b) 2,5
133. a) Ekvationens rötter
$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = -6 + 3i \\ z_3 = -6 - 3i \end{cases}$$

b) 3,75
134. $a = -2$ och $b = 5$
135. $a = -10$ och $b = 26$
136. $p = 6$ och $q = 4,25$
137. $A = 4$ och $B = -15$
138. $z = -1, z = \pm i$
139. $z = \pm 1, z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{23}}{2}$
140. $a = 3, 5x^4 + 10x^3 + x^2 - x - 6$
141. 4
142. -39
143. 5
144.
$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 + i \\ x_3 = 1 - i \end{cases}$$
145.
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 + i \\ x_3 = 3 - i \end{cases}$$

$$146. \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 + 2i \\ x = -4 - 2i \end{cases}$$

147. ---

148. ---

149. ---

$$150. x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$151. x = 7, \quad x = \frac{1}{7}$$

$$152. x = \frac{2}{3}, \quad x = \frac{1}{6}$$

153. a) $C = 4, D = -4$

b) Ekvationen har en rot till eftersom en tredjegradsekvation alltid har tre rötter, reella eller komplexa. $z_3 = 1$

154. a) $B = -5, C = 4$

b) Ekvationen har en rot till eftersom en tredjegradsekvation alltid har tre rötter, reella eller komplexa. $z_3 = 5$

$$155. x = 1 + 2i, \quad x = 1 - 2i$$

$$156. z = 1 + 2i, \quad z = 1 - 2i$$

$$157. z = 1 + 3i, \quad z = 1 - 3i$$

$$158. \text{ Ex. } (x^2 - 1)(x + i)(x - i) = x^4 - 1 = 0$$