1) $\int_1^2 2x^3\,dx = \left[2\cdot\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[\frac{x^4}{2}\right]_1^2 =$

$= \frac{2^4}{2} - \frac{1^4}{2} = 2^3 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{7{,}5}}$

2) a) $210^\circ = 210\cdot\frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{3\cdot 70\cdot\pi}{3\cdot 60}\text{ rad} = \frac{7}{6}\pi\text{ rad}$ $\underline{\underline{(3{,}665\text{ rad})}}$

b) $-3\pi\text{ rad} = -3\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = -3\cdot 180^\circ = \underline{\underline{-540^\circ}}$

3) a) $g(x) = 4\cdot\sin 5x$

$g'(x) = 4\cdot(\cos 5x)\cdot 5 = \underline{\underline{20\cdot\cos 5x}}$

b) $h(x) = \frac{3x}{x^2+1}$: Kvotregeln

$h'(x) = \frac{3(x^2+1) - 3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2} =$

$= \underline{\underline{\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}}}$

4) $f(x) = e^{3x}$

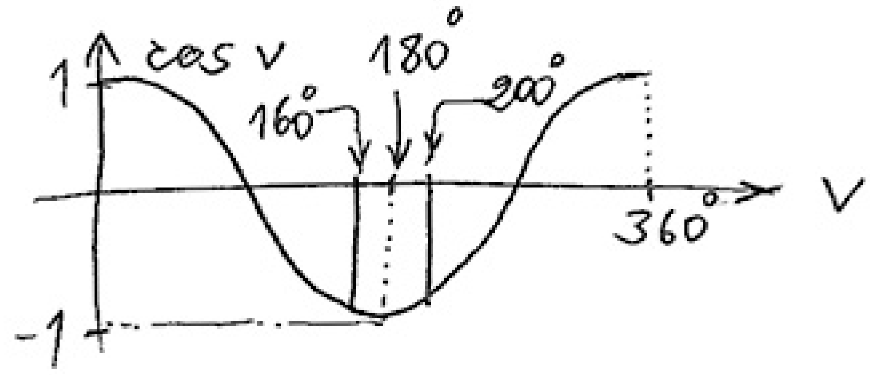
$F(x) = \frac{e^{3x}}{3} + C$

$F(0) = \frac{e^{3\cdot 0}}{3} + C = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $F(x) = \underline{\underline{\frac{e^{3x}}{3} + 1}}$

$\frac{1}{3} + C = \frac{4}{3}$

$C = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

5) Med kurvan:



$\cos 161° < \cos 160°$
$\vdots$
$\cos 180° <$ — 〃 —

Symmetri

$\cos 199° < \cos 200°$
$\vdots$
$\cos 180° < \cos 200°$

För alla v med $160° < v < 200°$ är $\cos v < \cos 160°$

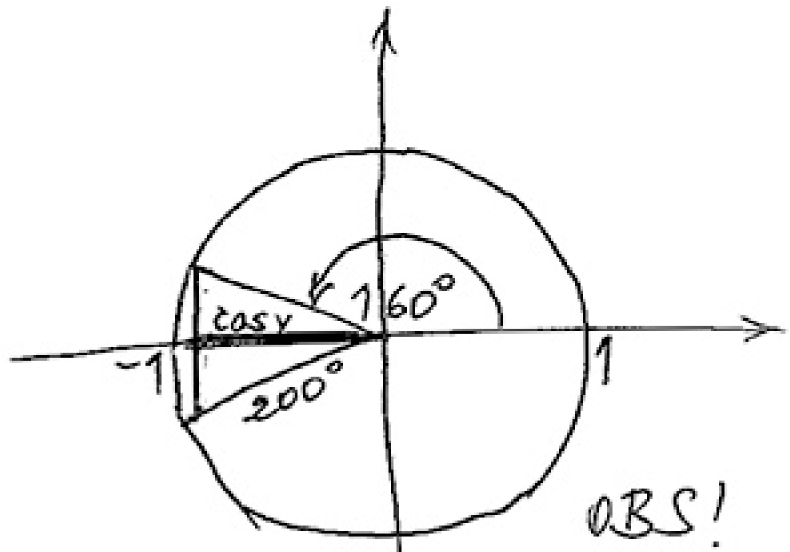
Med enhetscirkeln:

$v = 161°$
$\Downarrow$
$\cos 161° < \cos 160°$

Längre (större) i det negativa

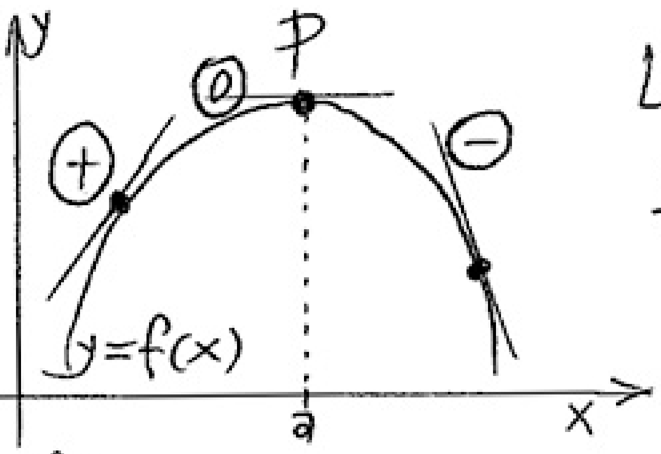
$\vdots$

samma som ovan!



OBS!
cos v alltid på x-axeln.

6) a)



Lutningen dvs derivatan $f'(x)$ går från + över 0 till −. Dvs:

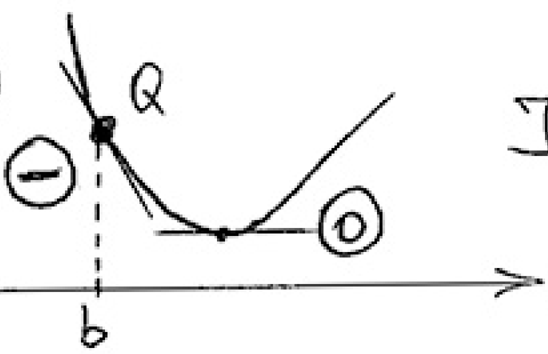
$f'(x)$ minskar hela tiden

$f''(x) < 0$: Derivatans ändring (— 〃 — derivata) är negativ.

Därför:
$f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$ $\Rightarrow$

Alternativ E

b)



I Q går $\underbrace{\text{derivatan}}$ från − mot 0. Dvs:

$f'(x)$ ökar hela tiden (mellan Q och min)

$f''(x) > 0$: Derivatans ändring (— 〃 — derivata) är positiv.

$f'(b) < 0$ och $f''(b) > 0$ $\Rightarrow$

Alternativ F

7) Områdets undre gräns är 0 (se bilden).

— // — övre — // — (Kurvornas skärningspunkter):

$$x^3-2x^2+1 = x^3-2x+1$$

$$-2x^2 = -2x \qquad | /(-2)$$

$$x^2 = x \qquad | -x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \qquad \text{Nollproduktmetoden}$$

$$x_1 = 0$$

$$\underline{\underline{x_2 = 1}}$$

$$A = \int_0^1 (x^3-2x^2+1)-(x^3-2x+1)\,dx =$$

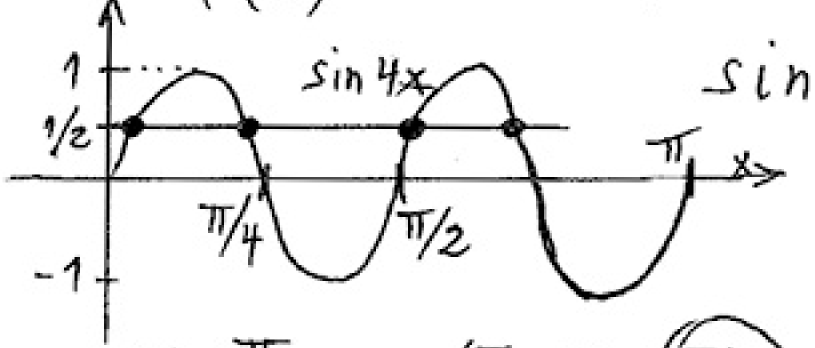
$$= \int_0^1 (x^3-2x^2+1-x^3+2x-1)\,dx = \int_0^1 (-2x^2+2x)\,dx =$$

$$= \left[-2\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{3}+1-(0+0) = 1-\frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ a.e.}$$

8) $f(x) = 2x + \cos 4x$

$f'(x) = 2 - 4\cdot\sin 4x = 0 \qquad |/4$



$\sin 4x = \frac{1}{2}$: Se tabell över exakta värden

$4x = \frac{\pi}{6} \qquad |/4$

$x_1 = \frac{\pi}{24}$

$x_2 = \frac{\pi}{4} - x_1 = \frac{6\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{5\pi}{24}$

$x_3 = \frac{\pi}{2} + x_1 = \frac{12\pi}{24} + \frac{\pi}{24} = \frac{13\pi}{24}$

$x_4 = \frac{3\pi}{4} - x_1 = \frac{18\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{17\pi}{24}$

9) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \{\text{Formler för dubbla vinkeln}\} =$

$$= \frac{2\cdot \sin x \cdot \cos x}{1+(2\cos^2 x - 1)} = \frac{\cancel{2}\cdot \sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{2}\cdot \cos^{\cancel{2}} x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

10) a) Vi bildar differensen mellan $F_1(x)$ och $F_2(x)$:

$$\frac{1}{1-\sin x} - \frac{2\cdot\sin x - 1}{1-\sin x} = \frac{1-2\sin x+1}{1-\sin x} =$$

$$= \frac{2-2\sin x}{1-\sin x} = \frac{2\cdot(1-\sin x)}{1-\sin x} = 2$$

$$\Downarrow$$

Därför att

$$F_1'(x) = F_2'(x)$$

b) $F_1(x) - F_2(x) = \text{const.}$ | Derivera båda leden

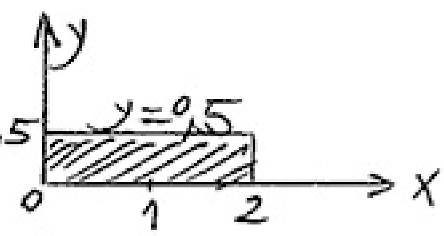
$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$F_1'(x) = F_2'(x)$$

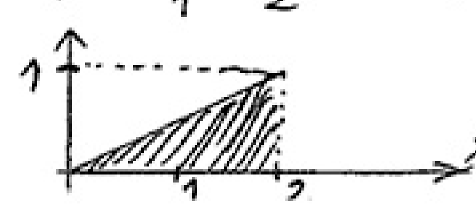
11)
- $A = \int_0^2 6\,dx = \{\text{se bilden}\} = 2\cdot 6 = 12$ a.e.

  $B = \int_0^2 (6-3x)\,dx = \{\text{se bilden}\} = \frac{2\cdot 6}{2} = 6$ a.e.

- $y_1 = 0{,}5$: $\text{Area} = \int_0^2 0{,}5\,dx = 2\cdot 0{,}5 = 1$ a.e.



  $y_2 = 0{,}5x$: $\text{Area} = \int_0^2 0{,}5x\,dx = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$ a.e



11) (forts.)

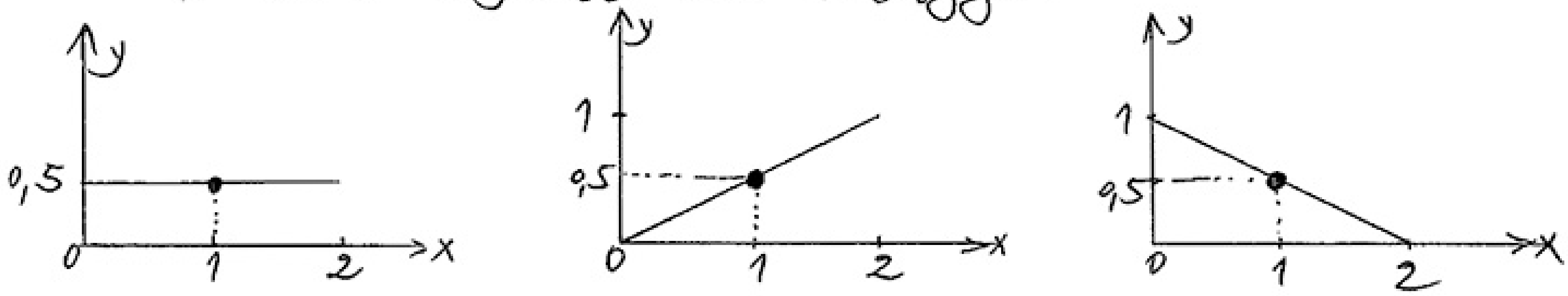
- $\int_0^2 (kx+m)\,dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{kx^2}{2} + mx\right]_0^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4k}{2} + 2m = 1$$

$$2k + 2m = 1 \quad \Big| /2$$

$$\underline{\underline{k + m = \frac{1}{2}}}$$

- För att arean ska ligga i 1:a kvadranten och bli 1 kan ett av följande fall föreligga:

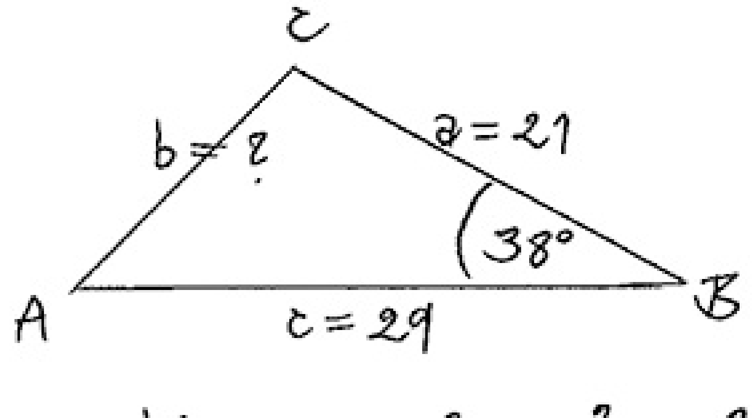


Dvs linjen måste gå genom $(1; 0{,}5)$.

Detta ger de ytterligare villkoren: $0 \le m \le 1$

eller $\underline{\underline{-\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}}}$

12)



OBS! Triangeln är <u>inte</u> rätvinklig!

Cosinussatsen: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B =$

$$= 21^2 + 29^2 - 2 \cdot 21 \cdot 29 \cdot \cos 38^\circ = 322{,}203$$

$$b = \sqrt{322{,}203} = \underline{\underline{17{,}95}}$$

13) Amplituden $A = 3 - 1 = 2$

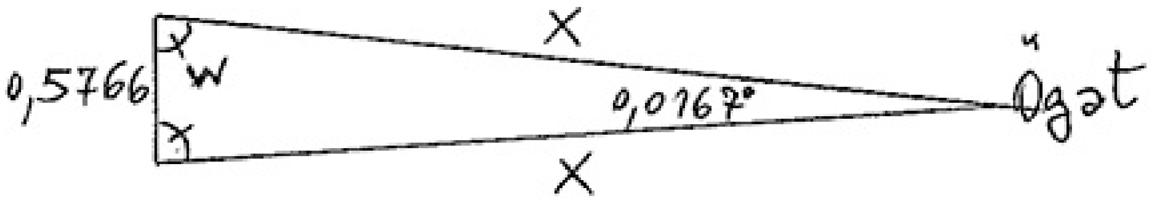
Frekvensen $k = \frac{360^\circ}{540^\circ} = \frac{2}{3}$

Förskjutning i y-led $= +1$

$$\Rightarrow y = 1 + 2 \cdot \sin \frac{2}{3} x$$

14) Pixelbredd $= \dfrac{1107 \text{ mm}}{1920} = 0{,}5766 \text{ mm}$

$\Downarrow$



Likbent

$\Downarrow$

$w = \dfrac{180° - 0{,}0167°}{2} = 89{,}99165°$

Sinussatsen:

$$\frac{\sin 0{,}0167}{0{,}5766} = \frac{\sin 89{,}99165}{X}$$

$$X = \frac{\sin 89{,}99165 \cdot 0{,}5766}{\sin 0{,}0167} = 1978{,}25 \text{ mm}$$

Svar: $\underline{\underline{1{,}98 \text{ m}}}$

15) $V'(t) = 8 + e^{0{,}01 \cdot t}$

a) $V(60) = \int_0^{60} (8 + e^{0{,}01 \cdot t})\, dt = \left[8t + 100 \cdot e^{0{,}01 \cdot t}\right]_0^{60} =$

$= 8 \cdot 60 + 100 \cdot e^{0{,}6} - 100 \cdot e^{0} = \underline{\underline{562{,}21 \text{ liter}}}$

b) $\int_0^{x} (8 + e^{0{,}01 \cdot t})\, dt = 2500$

$\left[8t + 100 \cdot e^{0{,}01 \cdot t}\right]_0^{x} = 2500$

$8x + 100 \cdot e^{0{,}01x} - 100 = 2500$

$100 \cdot e^{0{,}01x} + 8x - 2600 = 0$

Räknarens ekvationslösare ger: $x = 216{,}29$

Svar: ca. $\underline{\underline{216 \text{ minuter}}}$

16) $f(x) = x^4 - x^5$

$f'(x) = 4x^3 - 5x^4$ $\qquad$ $f''(x) = 12x^2 - 20x^3$

$f'(0) = 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $f''(0) = 12 \cdot 0 - 20 \cdot 0 = 0$

$f''(0) = 0$ innebär att man <u>inte</u> kan avgöra Min eller Max ?

Därför: <u>teckenstudie</u>!

För att få reda på det lämpliga intervallet för teckenstudie:

$$f'(x) = 4x^3 - 5x^4 = 0$$
$$x^3 \cdot (4 - 5x) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$4 - 5x_2 = 0 \quad | + 5x_2$$
$$4 = 5x_2 \quad | /5$$
$$x_2 = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

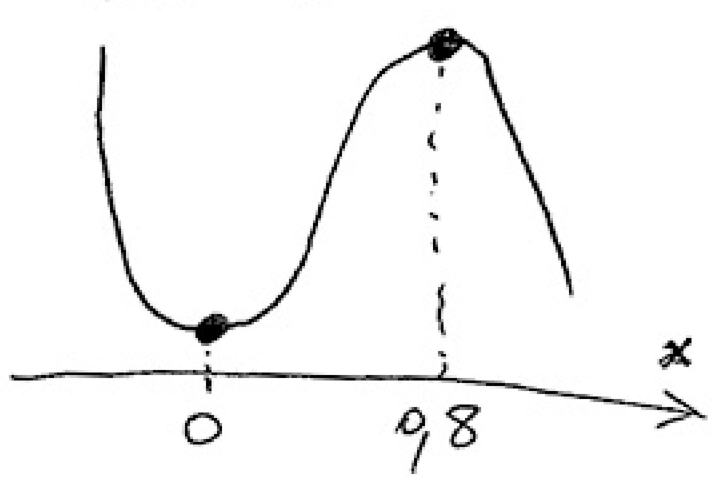
$f'(-0{,}1) = -0{,}0045 < 0$

$f'(0{,}1) = 0{,}0035 > 0$

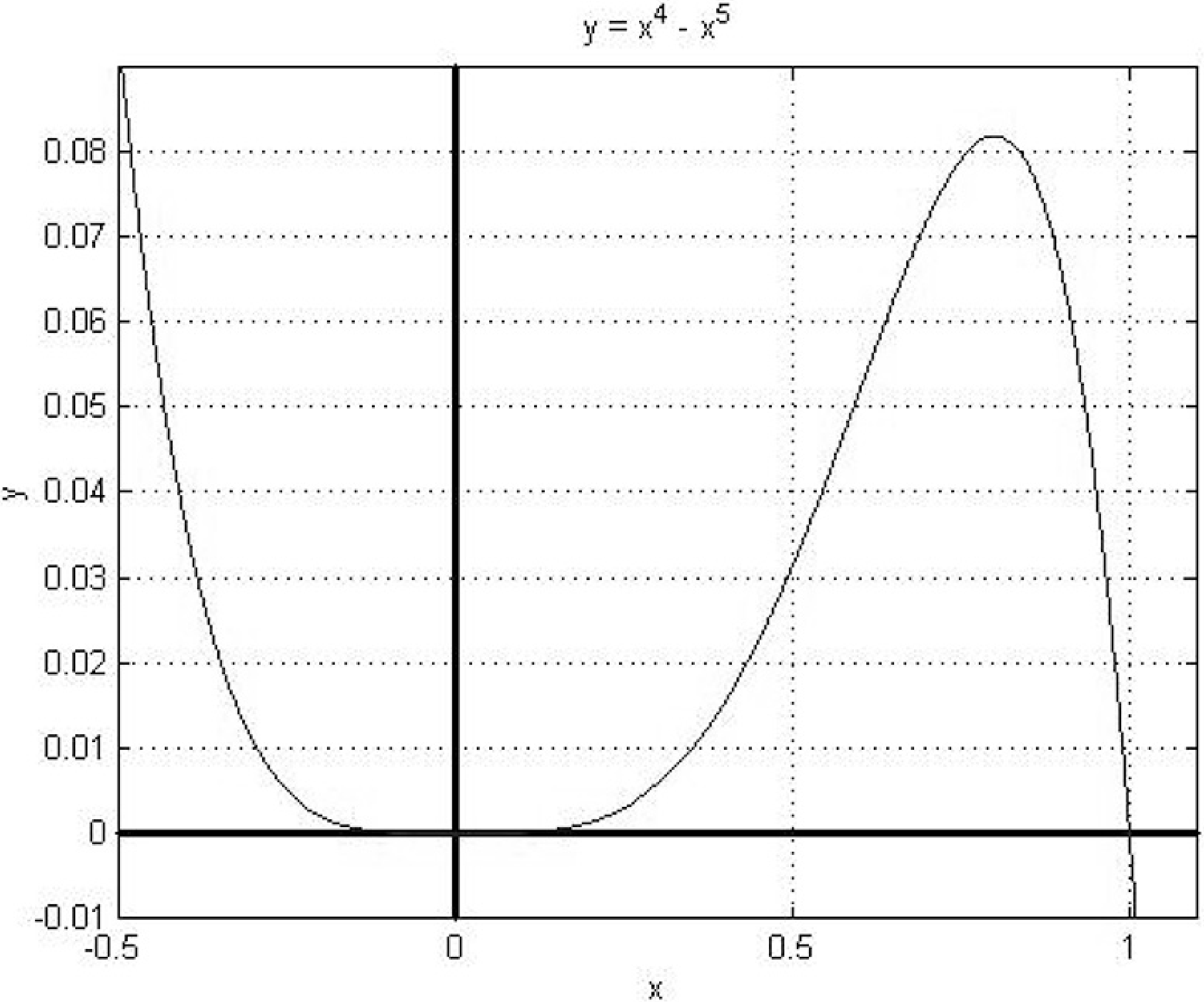
$f'(1) = -1 < 0$

x		0		0,8	
$f'(x)$	< 0		> 0		< 0
$f(x)$	↘		↗		↘

Skiss:

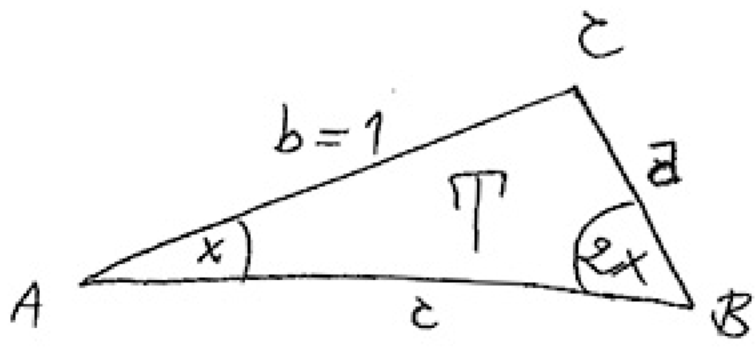


<u>Svar:</u> Funktionen $f(x) = x^4 - x^5$ har en <u>minimipunkt</u> för $x = 0$.



y = x^4 - x^5
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
y
-0.5
0
0.5
1
x

17)



Arean $T(x)$ ska maximeras.

Vinkeln $C = 180° - 3x$

- Bestämma a: Sinussatsen $\dfrac{a}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin 2x}$

$$a = \frac{\sin x}{\sin 2x}$$

$$a = \frac{\cancel{\sin x}}{2 \cdot \cancel{\sin x} \cdot \cos x}$$

$$a = \frac{1}{2 \cdot \cos x}$$

- Bestämma c:

Sinussatsen

$$\frac{c}{\sin(180° - 3x)} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$c = \frac{\sin(180° - 3x)}{\sin 2x}$$

$\sin(180° - v) = \sin v$

$$c = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

- Areasatsen: $T = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin 2x}{2} = \dfrac{\sin 3x \cdot \cancel{\sin 2x}}{2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \cancel{\sin 2x}} =$

$$T(x) = \frac{\sin 3x}{4 \cdot \cos x}$$

- $T'(x) = \dfrac{3 \cdot \cos 3x \cdot 4 \cos x - \sin 3x \cdot (-4) \cdot \sin x}{16 \cdot \cos^2 x} = 0 \quad \Big| \cdot 16 \cos^2 x$

$$12 \cdot \cos 3x \cdot \cos x + 4 \cdot \sin 3x \cdot \sin x = 0 \qquad \Big/ \cos 3x \;\; \cos x \;\; 4$$

$$\underbrace{3 + \tan 3x \cdot \tan x}_{f(x)} = 0$$

Räknarens ekvationslösare ger: $\underline{x = 34{,}26°}$

Rita grafen för $T(x)$ med $0 < x < 90°$ för att se att är en maximipunkt.