

* Samband mellan rötter och koefficienter hos ekvationer av högre grad

Du har tidigare fått lära dig sambandet mellan en andragradsekvations rötter och koefficienter. Vi ska nu se efter om det finns något motsvarande samband för ekvationer av högre grad och utgår därför från tredjegradspolynomet

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

där koefficienterna a, b, c är rationella tal. Vi vet att tredjegradspolynom har tre nollställen. Dessa kallar vi för p_1, p_2 och p_3 .

Vi faktorerar nu $f(x)$ och multiplicerar sedan ihop faktorerna.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - p_1) \cdot (x - p_2) \cdot (x - p_3) = (x^2 - (p_1 + p_2)x + p_1 \cdot p_2) \cdot (x - p_3) \\ &= x^3 - (p_1 + p_2 + p_3)x^2 + (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3)x - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

Om vi jämför det uttryck av $f(x)$ vi nu fick fram med det ursprungliga uttrycket av $f(x)$ får vi fram följande samband:

Samband

$$a = -(p_1 + p_2 + p_3) \quad b = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 \quad c = -p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

Vi kan alltså bl a utläsa att för en polynomekvation av grad tre gäller det att konstanttermen är lika med produkten av rötterna med ombytt tecken och att koefficienten framför x^2 är summan av rötterna med ombytt tecken.

Man kan visa att motsvarande samband gäller mellan rötter och koefficienter för polynomekvationer med högre gradtal än 3 (där koefficienten framför termen med högst gradtal är 1). Koefficienten framför termen med näst högst gradtal är summan av rötterna med omvänt tecken. För polynomekvationer med jämnt gradtal gäller att konstanttermen är lika med produkten av rötterna och för udda gradtal är konstanttermen lika med produkten av rötterna med ombytt tecken.

- 4458** Kontrollera att tredjegradsekvationen $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ har rötterna $-3, 2$ och 4 .

- 4459** Kontrollera att tredjegradsekvationen $4x^3 - x^2 - 12x + 3 = 0$ har rötterna $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ och $\frac{1}{4}$.

- 4460** Skriv ner en formel för sambandet mellan rötterna och konstanttermen samt rötterna och koefficienten framför x^{n-1} för en polynomekvation av grad n där koefficienterna är rationella tal. Utgå från att koefficienten för höstgradstermen är 1.

- 4461** Bestäm (utan att lösa ekvationen) den ekvation vars rötter är kvadraterna på rötterna till $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$.