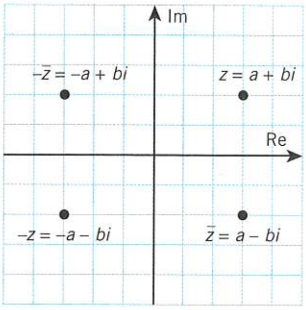
4121 Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Då är $-z = -a - bi$, $\bar{z} = a - bi$ och $-\bar{z} = -a + bi$. Dessa kan illustreras grafiskt på följande sätt



4122 a) $x = 1 \quad y = 1$

Ledtråd:
Realdelarna lika: $2x + y = 3$
Imaginärdelarna lika:
$x - y = 0$

b) $x = -1 \quad y = 3$

4123 a) $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

Ledtråd:
Förläng med nämnarens konjugat och förenkla.

b) $-\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i$

c) $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

d) $\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$

4124 Motexempel:
Om $z = 1 + i$ så är
$\bar{z} = 1 - i$ och $-z = -1 - i$
$\bar{z} \neq -z$

4125 $|z| = \sqrt{12}$

4126 a) $\text{Re}\, z = 0, \text{Im}\, z = 1$

Ledtråd:
Förläng med nämnarens konjugat.

b) $\text{Re}\, z = \frac{1}{2}, \text{Im}\, z = 1$

c) $\text{Re}\, z = \frac{1}{10}, \text{Im}\, z = \frac{3}{10}$

d) $\text{Re}\, z = 0, \text{Im}\, z = 1$

4127 Ja.

Motivering:
Ett komplext tal vars real- och imaginärdel är lika kan betecknas $z = a + ai$ där a är ett reellt tal.

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + ai}{a - ai} = \frac{(a + ai)(a + ai)}{(a - ai)(a + ai)} =$$
$$= \frac{(2a^2 i)}{(2a^2)} = i$$

4128 a) $z = 1 + 2i$ c) $z = 6 - 6i$

b) $z = 0{,}5i$ d) $4i$

4129 a) 1   b) 2

4130 a) $63 + 16i$

b) $\frac{49}{169} + \frac{219}{169}i$

4131 $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i = 0{,}8 + 0{,}6i$

4133 306

4134 a) 23   c) $\sqrt{68}$

b) 20   d) 40

4135 *Lösning:*

$\text{VL} = (-1 - 3i)^3 + 3(-1 - 3i)^2$
$+ 12(-1 - 3i) + 10 =$
$= (26 + 18i) + 3(-8 + 6i)$
$- 2 - 36i = (26 - 24 - 2)$
$+ (18 + 18 - 36)i = 0 = \text{HL}$
VSV

4136 a) $b = 1,\ a > -2$

b) $a = -\frac{b}{2}$

4137 $-\frac{1}{5} - \frac{34}{15}i$

4138 *Lösning:*

$$\text{HL} = \frac{1}{2i}(2 - 3i - (2 + 3i)) =$$
$$= \frac{1}{2i}(-6i) = -3 = \text{Im}\, z = \text{VL}$$
V.S.V.

4139 *Lösning:*

$\text{HL} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(5 - 2i)(5 + 2i)} =$
$= \sqrt{25 - 4i^2} = \sqrt{29} = |z| = \text{VL}$
V.S.V.

4140 *Lösning:*

a) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.
Då är $\bar{z} = a - bi$ och
$\bar{\bar{z}} = a + bi$.
Därmed är $\text{VL} = \bar{\bar{z}} = a + bi =$
$= z = \text{HL}$ VSV

b) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $z - w = a + bi - (c + di) =$
$= (a - c) + (b - d)i$ och
$\overline{z - w} = (a - c) - (b - d)i$
$\text{HL} = \bar{z} - \bar{w} = a - bi - (c - di) =$
$= (a - c) - (b - d)i = \text{VL}$
VSV

c) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $z \cdot w =$
$= (a + bi)(c + di) =$
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$
och därmed
$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i$
$\text{HL} = \bar{z}\,;\, \bar{w} = (a - bi)(c - di) =$
$= (ac - bd) - (ad + bc)i = \text{VL}$
VSV

d) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $\bar{z} = a - bi, \bar{w} = c - di$

och $\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} =$

$= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} =$

$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

$\text{VL} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} =$

$= \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

$\text{HL} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{a - bi}{c - di} =$

$= \frac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} =$

$= \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

Därmed är $\text{VL} = \text{HL}$ V.S.V.

4141 *Lösning:*

a) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.

Då är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ och $\bar{z} = a - bi$

$\text{HL} = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = \text{VL}$

VSV

b) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.

Då är $zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\text{VL} = |zw| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$

$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd} =$

$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$

$\text{HL} = |z| \cdot |w| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} =$

$= \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2}$

Därmed är VL = HL VSV

c) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.

Då är $\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$

$\text{VL} = \left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\frac{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}{(c^2 + d^2)^2}} =$

$= \sqrt{\frac{(ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd}{(c^2 + d^2)^2}} =$

$= \frac{\sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}}{c^2 + d^2}$

$\text{HL} = \frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)(c^2 + d^2)}} =$

$= \frac{\sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}}{c^2 + d^2}$

Därmed är VL = HL VSV

d) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.

$\text{VL} = \text{Re}\, z = a$

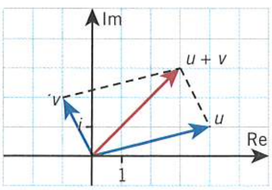
$\text{HL} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) =$

$= \frac{1}{2}(a + bi + a - bi) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2a = a$

Därmed är VL = HL VSV

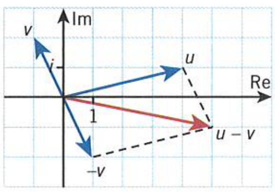
4202 a)



$u + v = 3 + 3i$

$|u + v| = \sqrt{18}$

b)



$u - v = 5 - i$

$|u - v| = \sqrt{26}$

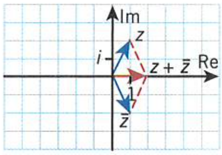
4203 Nej.

Motivering:

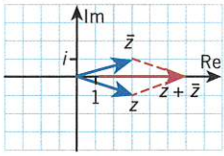
$|u| = \sqrt{676} = 26$

$|z| = \sqrt{625} = 25$

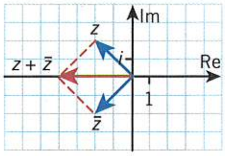
4204 a)



b)



c)



d) $z + \bar{z} = 2a$

Motivering:

$z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$

4205 a) $|z - 4| = 4$

Ledtråd:

Cirkelns medelpunkt är $(4, 0) = 4$ och radien är 4.

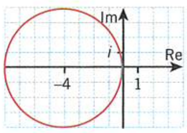
b) $|z - (4 + 4i)| = 4$

Ledtråd:

Cirkelns medelpunkt är $(4, 4) = 4 + 4i$ och radien är 4.

4206 a) Teckenfel i vänsterledet.

b)



4207 T ex $z = 10i$ eller

$z = \sqrt{50} + \sqrt{50}i$

Ledtråd:

Välj ett tal z så att $|z| = 10$ men inte $z = 10$ eller $z = -10$ eftersom det är reella tal.