

- 4316 a)  $\sin 5v = 16 \sin^5 v - 20 \sin^3 v + 5 \sin v$   
 b)  $\cos 5v = 16 \cos^5 v - 20 \cos^3 v + 5 \cos v$   
*Ledtråd:*  
 Gör på motsvarande sätt som i föregående uppgift.

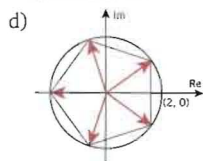
4317  $2 \cos n\pi$

- 4319 a)  $r^5 (\cos 5v + i \sin 5v) = 32 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$   
 b)  $r^5 = 32$  dvs  $r = 2$   
 $5v = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$ ,  
 dvs  $v = 36^\circ + n \cdot 72^\circ$

- c)  $z_1 = 2 (\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ)$   
 $z_2 = 2 (\cos 108^\circ + i \sin 108^\circ)$   
 $z_3 = 2 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$   
 $z_4 = 2 (\cos 252^\circ + i \sin 252^\circ)$   
 $z_5 = 2 (\cos 324^\circ + i \sin 324^\circ)$

*Ledtråd:*

Fem rötter till en femtegradsekvation.



- 4320 a)  $z_1 = 4$   
 $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$   
 $z_3 = -2 - 2\sqrt{3}i$   
*Ledtråd:*  
 Skriv båda leden i polär form. Vi får  $r^3 = 64$  och  $3v = 0 + n \cdot 360^\circ$

- b)  $z_1 = 3i$   
 $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$   
 $z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

*Ledtråd:*

Skriv båda leden i polär form. Vi får  $r^3 = 27$  och  $3v = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$

4321 a)  $w = 27i$

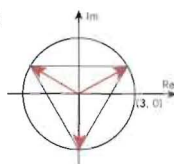
- b) De övriga rötterna har samma absolutbelopp som  $z_1$  och argumenten  $30^\circ + 120^\circ$  respektive  $30^\circ + 2 \cdot 120^\circ$

*Motivering:*

Rötterna till ekvationen  $z^3 = w$  är hörn i en regelbunden triangel med medelpunkt i origo.

- c)  $z_2 = 3 (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$   
 $z_3 = 3 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$

d)



4322  $z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$

$z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$

$z_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$

*Ledtråd:*

Rötterna till ekvationen  $z^4 = w$  är hörn i en kvadrat.

Argumenten är  $\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$  där  $n = 0, 1, 2, 3$

- 4323 a)  $z_1 = 2, z_2 = 2i$   
 $z_3 = -2, z_4 = -2i$

b)  $z^4 = 16$

*Motivering:*

Fyra rötter ger att ekvationen är av fjärde graden. En rot  $z_1 = 2$  ger ekvationen  $z^4 = 16$

- 4324 a) Tre rötter:  $n = 0, 1, 2$   
 $z = \cos \left( n \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( n \cdot \frac{2\pi}{3} \right)$

- b) Fem rötter:  $n = 0, 1, 2, 3, 4$

$z = \cos \left( \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \right)$

- c) Fyra rötter:  $n = 0, 1, 2, 3$

$z = \cos \left( \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$

- d) Sex rötter:  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$z = 3 \left( \cos \left( n \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( n \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right)$

- e) Fyra rötter:  $n = 0, 1, 2, 3$

$z = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$

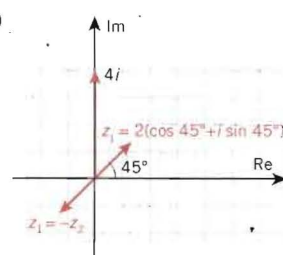
- f) Tre rötter:  $n = 0, 1, 2$

$z = \sqrt[3]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right)$

4325 a)  $4 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

- b)  $z_1 = 2 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$   
 $z_2 = 2 (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$   
 som också kan skrivas  
 $z = \pm 2 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

c)



4326  $z^3 = -125i$

*Lösning:*

Figuren visar att ekvationen har tre lösningar. Den är alltså av tredje graden. En lösning är  $z_1 = 5 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ .  
 $z^3 = 125 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -125i$

4327 a) Två reella och två icke-reella

b) En reell och fyra icke-reella

c) En reell och åtta icke-reella

d) Två reella och 98 icke-reella

*Ledtråd:*

Endast rötter med argumentet  $0^\circ$  och  $180^\circ$  är reella.

4328  $z^{10} = -1$

- 4329  $z_1 = \sqrt{2} (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$   
 $z_2 = \sqrt{2} (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

*Ledtråd:*

Skriv först högerledet på formen  $a + bi$  och skriv sedan om båda leden i polär form.

4330 a) 17

*Motivering:*

Ekvationen har 17 komplexa rötter, eftersom de komplexa talen omfattar även de reella talen.

b) 4

*Motivering:*

Rötterna är

$z = \cos v + i \sin v$ , där

$v = \frac{2\pi}{17} \cdot k, k = 0, 1, 2, \dots, 16$

För  $k = 5, 6, 7, 8$  ligger de i andra kvadranten, 4 rötter

$$4331 \quad z_{p+1} = 5^{1/n} \left( \cos \left( \frac{90^\circ}{n} + p \cdot \frac{360^\circ}{n} \right) + i \sin \left( \frac{90^\circ}{n} + p \cdot \frac{360^\circ}{n} \right) \right) \text{ där } p = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$4334 \text{ a) } z = 5e^{i\pi/2} \quad \text{b) } z = 5e^{i3\pi/4} \\ u = 5e^{i3\pi/2} \quad u = 5e^{i5\pi/4}$$

$$4335 \text{ a) } e^{i\pi/2} \\ \text{Lösning:}$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$$

$$\text{b) } 2e^{i\pi}$$

$$\text{c) } 3e^{i3\pi/2}$$

$$\text{d) } \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$4336 \text{ a) } -1 \quad \text{b) } 1$$

$$\text{c) } \frac{1}{e^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \approx$$

$$\approx 0,025 + 0,043i$$

$$\text{d) } e(\cos 1 + i \sin 1) \approx$$

$$\approx 1,47 + 2,29i$$

$$4337 \quad |z| = 6$$

$$\arg z = \pi/3$$

$$\operatorname{Re} z = 3$$

$$\operatorname{Im} z = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Lösning:}$$

$$z = 6 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$= 6 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 3 + 3\sqrt{3}i$$

$$4338 \text{ a) } i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$\text{b) Tre rötter } n = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i\pi/2}$$

$$z_2 = e^{i7\pi/6}$$

$$z_3 = e^{i11\pi/6}$$

$$4339 \text{ a) } 2 \cdot e^{i\pi/6} \quad \text{b) } e^{i\ln 2 + i\pi/6}$$

$$4340 \text{ a) } 15e^{i8\pi/15}$$

$$\text{b) } -13841287201$$

$$4341 \text{ a) } \exp(2 \pm 3\pi i) = e^{2 \pm 3\pi i} =$$

$$= e^2 \cdot e^{\pm 3\pi i} = e^2 (\cos(\pm 3\pi) +$$

$$+ i \sin(\pm 3\pi)) =$$

$$= e^2 (\cos(\pi) + 0) = -e^2$$

$$\text{b) } \exp \left( \frac{2 + \pi i}{4} \right) = e^{1/2 + i\pi/4} = \\ = \sqrt{e} \cdot e^{i\pi/4} = \\ = \sqrt{e} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \\ = \sqrt{e} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ = \sqrt{\frac{e}{2}} (1 + i)$$

$$4342 \text{ a) } z = i \left( \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \right)$$

$$\text{b) } z = \frac{\ln 2}{2} + i \left( \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \right)$$

$$4343 \text{ a) } \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(\cos v + i \sin v + \cos(-v) +$$

$$+ i \sin(-v)) = \frac{1}{2} (2 \cos v) =$$

$$= \cos v$$

Ledtråd:

Kom ihåg att

$$\cos(-v) = \cos v \text{ och}$$

$$\sin(-v) = -\sin v$$

$$\text{b) } \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \frac{1}{2i} (\cos v +$$

$$+ i \sin v - \cos(-v) -$$

$$- i \sin(-v)) = \frac{1}{2i} (2i \sin v) =$$

$$= \sin v$$

### Historik: Euler – en produktiv matematiker

1 Felet består i att man antagit att rotlagarna gäller för negativa tal.

2 Eulers formel ger

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi =$$

$$= -1 + i \cdot 0 = -1 \text{ och därmed är}$$

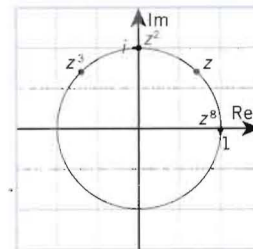
$$e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

3 a)  $8e^{i\pi/2}$

$$\text{b) } 2e^{-i\pi/6} = 2e^{i11\pi/6}$$

$$\text{c) } 16e^{i\pi/3}$$

4



$$5 \text{ a) } 6e^{i\pi/6}$$

$$\text{b) } \frac{27}{4} e^{-i\pi/6} = \frac{27}{4} e^{i11\pi/6}$$

$$6 \text{ a) } e^3 (\cos 1 + i \sin 1) \approx 10,9 + 16,9i$$

$$\text{b) } e \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) =$$

$$= e \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \approx -1,92 + 1,92i$$

$$7 \quad VL = e^{2 + \frac{\pi i}{3}} = e^2 \cdot e^{\frac{\pi i}{3}} =$$

$$= e^2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$= e^2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} e^2 (1 + i\sqrt{3}) = HL$$

$$8 \text{ a) } \cos i = \frac{e^{-1} + e}{2}$$

$$\text{b) } \sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i}$$

$$\text{c) } \ln i = i \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } i^i = e^{-\pi/2}$$

Ledtråd:

a) och b) Utgå från Eulers formel

c) Utgå från om  $z = \ln i$  så är  $e^z = i$  och  $z = i \frac{\pi}{2}$

d) Utgå från  $i^i = e^{i \ln i} = e^{-\pi/2}$

$$4403 \text{ a) } x = \pm 5 \quad \text{d) } x = \pm \sqrt{50}$$

$$\text{b) } x = \pm 5i \quad \text{e) } x = \pm 2$$

$$\text{c) } x = \pm \sqrt{50} \cdot i \quad \text{f) } x = \pm 2i$$

$$4404 \text{ a) } x = 4 \pm 3i$$

$$\text{b) } x_1 = 1 \quad x_2 = 7$$

$$\text{c) } x = 5 \pm 2i$$

$$\text{d) } z = -2 \pm 5i$$