4132 **Bevisa att likheten gäller.**

a) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

a) Vi börjar med att låta $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Då är

$\bar{z} = a - bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z|^2 = a^2 + b^2$

Vi vill nu bevisa att vänsterledet (VL) är lika med högerledet (HL):

$\text{VL} = |z|^2 = a^2 + b^2$

$\text{HL} = z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) =$
$= a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

VL = HL

Vi har visat att både VL och HL är lika med $a^2 + b^2$. Därmed har vi bevisat att likheten är sann.

b) Låt $z = a + bi$ respektive $w = c + di$, där a, b, c och d är reella tal. Då är

$\bar{z} = a - bi$

$\bar{w} = c - di$

$z + w = a + bi + c + di =$
$= (a + c) + (b + d)i$

Vi samlar ihop real- och imaginärdelarna var för sig.

Nu bevisar vi att VL = HL:

$\text{VL} = \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i =$
$= a + c - bi - di =$
$= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w} = \text{HL}$

VSB

4133 Bestäm $z \cdot \bar{z} + |z|$ om $z = 8 - 15i$

4134 Låt $z = 5 + 2i$ och $w = 3 - 4i$. Beräkna

a) $\text{Re}\,(zw)$

b) $\text{Im}\,(z^2)$

c) $|z + w|$

d) $|z - w|^2$

4135 Visa att om $z = -1 - 3i$ så är

C $z^3 + 3z^2 + 12z + 10 = 0$

4136 Låt $z = 2 - i$ och $w = a + bi$, där a och b är reella tal. För vilka värden på a och b är

a) $z + w$ ett reellt tal större än 0?

b) $z \cdot w$ rent imaginärt?

4137 Låt $z = 3 - 2i$ och $w = 5 - 3i$. Skriv kvoten

$\dfrac{z + 2w}{2\bar{z} - z}$ på formen $a + bi$.

4138 Låt $z = 2 - 3i$ och visa att

$$\text{Im}\,z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

4139 Visa att $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ för $z = 5 - 2i$.

Bevisa att likheterna gäller.

4140 a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

d) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

4141 a) $|z| = |\bar{z}|$

b) $|zw| = |z| \cdot |w|$

c) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

d) $\text{Re}\,z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$