

Lösning:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = y + 1$$

kvadrera båda sidor

$$x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1 \quad \text{förenkla}$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \quad (y \geq -0,5)$$

4304 a) $z^4 = -625$

Lösning:

$$\begin{aligned} z^4 &= 5^4 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = \\ &= 625 (-1 + 0i) = -625 \end{aligned}$$

b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

Lösning:

$$\begin{aligned} z^4 &= 2^4 (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = \\ &= 16(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

4305 a) $z = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

b) $z^5 = 32(\cos 600^\circ + i \sin 600^\circ)$

c) $z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i$

Ledtråd:

$$\begin{aligned} \cos 600^\circ + i \sin 600^\circ &= \\ &= \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ \end{aligned}$$

4306 a) $-128 - 128\sqrt{3}i$

Lösning:

$$\begin{aligned} (2 + 2\sqrt{3}i)^2 &= \\ &= 4 + 8\sqrt{3}i - 12 = \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i \\ (2 + 2\sqrt{3}i)^4 &= \\ &= (-8 + 8\sqrt{3}i)^2 = \\ &= 64 - 128\sqrt{3}i - 192 = \\ &= -128 - 128\sqrt{3}i \end{aligned}$$

b) $-128 - 128\sqrt{3}i$

Lösning:

$$\begin{aligned} (4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ))^4 &= \\ &= 256(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = \\ &= 256(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \\ &= -128 - 128\sqrt{3}i \end{aligned}$$

4307 a) -64

Ledtråd:

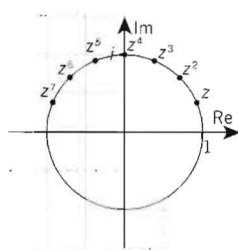
$$\begin{aligned} \sqrt{3} - i &= \\ &= 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) \end{aligned}$$

b) $-128 + 128i$

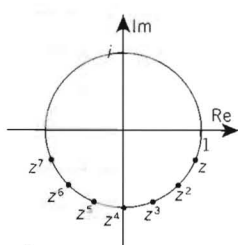
Ledtråd:

$$\begin{aligned} 2 - 2i &= \\ &= \sqrt{8}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) \end{aligned}$$

4308 a)



b)



4309 Tex $z = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

4310 a) 2

c) -4

b) 0

d) -8

Ledtråd:

I c) och d) kan det löna sig att gå över till polär form.

4311 $w = -729i$

Lösning:

$$\begin{aligned} z^6 &= 3^6 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^6 = \\ &= 729(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = \\ &= 729(0 - i) = -729i \end{aligned}$$

4312 a) Absolutbeloppet är $\sqrt{8}$

Argumentet är $\frac{\pi}{4}$

Ledtråd:

$$z = 2 + 2i$$

b) Absolutbeloppet är $5\sqrt{5}$

Argumentet är 4,40

Lösning:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + 2i)^{12}}{(1 - 2i)^9} = \\ &= \frac{(\sqrt{5}(\cos 1,107 + i \sin 1,107))^{12}}{(\sqrt{5}(\cos (-1,107) + i \sin (-1,107)))^9} = \\ &= \frac{(\sqrt{5})^{12} (\cos 13,286 + i \sin 13,286)}{(\sqrt{5})^9 (\cos (-9,963) + i \sin (-9,963))} = \\ &= 5\sqrt{5}(\cos 23,25 + i \sin 23,25) \end{aligned}$$

Argumentet i radianer =

$$= 23,25 = 23,25 - 3 \cdot 2\pi = 4,40$$

4313 a) $n = 4$

Lösning:

$$\begin{aligned} (-1 + i)^n &= \\ &= (\sqrt{2})^n (\cos(135^\circ \cdot n) + \\ &\quad + i \sin(135^\circ \cdot n)) \end{aligned}$$

Imaginärdelen är 0 om argumentet är delbart med 180° . Genom prövning ser vi att $n = 4$ är det lägsta värdet som ger detta.

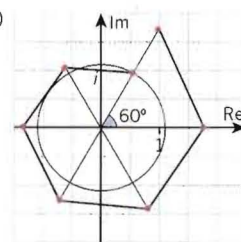
b) $n = 12$

Ledtråd:

Uttrycket i parentesen kan skrivas

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i$$

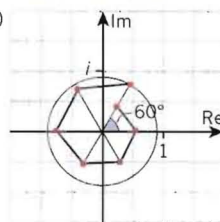
4314 a)



Kommentar:

När vi ökar exponenten med 1 kommer argumentet öka med 60° och beloppet multipliceras med 1,1. Punkterna bildar en utåtgående spiral.

b)



Kommentar:

När vi ökar exponenten med 1 kommer argumentet öka med 60° och beloppet multipliceras med 0,9. Punkterna bildar en inåtgående spiral.

4315 a) $\sin 3v = 3 \sin v - 4 \sin^3 v$

b) $\cos 3v = 4 \cos^3 v - 3 \cos v$

Ledtråd:

Utveckla $(\cos v + i \sin v)^3$ på två sätt. Dels med de Moivres formel, dels direkt. Realdelarna respektive imaginärdelarna lika ger sambanden.

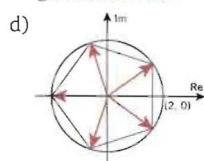
- 4316 a) $\sin 5v = 16 \sin^5 v - 20 \sin^3 v + 5 \sin v$
 b) $\cos 5v = 16 \cos^5 v - 20 \cos^3 v + 5 \cos v$
Ledtråd:
 Gör på motsvarande sätt som i föregående uppgift.

4317 $2 \cos nv$

- 4319 a) $r^5 (\cos 5v + i \sin 5v) = 32 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
 b) $r^5 = 32$ dvs $r = 2$
 $5v = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$
 dvs $v = 36^\circ + n \cdot 72^\circ$

- c) $z_1 = 2 (\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ)$
 $z_2 = 2 (\cos 108^\circ + i \sin 108^\circ)$
 $z_3 = 2 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
 $z_4 = 2 (\cos 252^\circ + i \sin 252^\circ)$
 $z_5 = 2 (\cos 324^\circ + i \sin 324^\circ)$

Ledtråd:
 Fem rötter till en femtegradsekvation.



- 4320 a) $z_1 = 4$
 $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$
 $z_3 = -2 - 2\sqrt{3}i$
Ledtråd:
 Skriv båda leden i polär form. Vi får $r^3 = 64$ och $3v = 0 + n \cdot 360^\circ$

- b) $z_1 = 3i$
 $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
 $z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

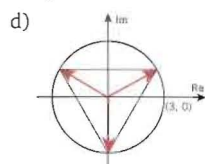
Ledtråd:
 Skriv båda leden i polär form. Vi får $r^3 = 27$ och $3v = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$

4321 a) $w = 27i$

- b) De övriga rötterna har samma absolutbelopp som z_1 och argumenten $30^\circ + 120^\circ$ respektive $30^\circ + 2 \cdot 120^\circ$

Motivering:
 Rötterna till ekvationen $z^3 = w$ är hörn i en regelbunden triangel med medelpunkt i origo.

- c) $z_2 = 3 (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$
 $z_3 = 3 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$



4322 $z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$

$z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$

$z_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$

Ledtråd:
 Rötterna till ekvationen $z^4 = w$ är hörn i en kvadrat.

Argumenten är $\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ där $n = 0, 1, 2, 3$

- 4323 a) $z_1 = 2, z_2 = 2i,$
 $z_3 = -2, z_4 = -2i$

b) $z^4 = 16$

Motivering:
 Fyra rötter ger att ekvationen är av fjärde graden. En rot $z_1 = 2$ ger ekvationen $z^4 = 16$

- 4324 a) Tre rötter: $n = 0, 1, 2$
 $z = \cos \left(n \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(n \cdot \frac{2\pi}{3} \right)$

- b) Fem rötter: $n = 0, 1, 2, 3, 4$
 $z = \cos \left(\frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \right)$

- c) Fyra rötter: $n = 0, 1, 2, 3$
 $z = \cos \left(\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$

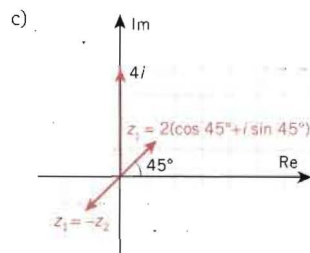
- d) Sex rötter: $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
 $z = 3 \left(\cos \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right)$

- e) Fyra rötter: $n = 0, 1, 2, 3$
 $z = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$

- f) Tre rötter: $n = 0, 1, 2$
 $z = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right)$

4325 a) $4 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

- b) $z_1 = 2 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
 $z_2 = 2 (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$
 som också kan skrivas
 $z = \pm 2 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$



4326 $z^3 = -125i$

Lösning:
 Figuren visar att ekvationen har tre lösningar. Den är alltså av tredje graden. En lösning är $z_1 = 5 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$.
 $z^3 = 125 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -125i$

- 4327 a) Två reella och två icke-reella
 b) En reell och fyra icke-reella
 c) En reell och åtta icke-reella
 d) Två reella och 98 icke-reella

Ledtråd:
 Endast rötter med argumentet 0° och 180° är reella.

4328 $z^{10} = -1$

4329 $z_1 = \sqrt{2} (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
 $z_2 = \sqrt{2} (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

Ledtråd:
 Skriv först högerledet på formen $a + bi$ och skriv sedan om båda leden i polär form.

4330 a) 17

Motivering:
 Ekvationen har 17 komplexa rötter, eftersom de komplexa talen omfattar även de reella talen.

b) 4

Motivering:
 Rötterna är $z = \cos v + i \sin v$, där

$v = \frac{2\pi}{17} \cdot k, k = 0, 1, 2, \dots, 16$

För $k = 5, 6, 7, 8$ ligger de i andra kvadranten, 4 rötter