

4141 Lösning:

a) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.

$$\text{Då är } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ och } \bar{z} = a - bi$$

$$\text{HL} = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = \text{VL}$$

VSV

b) Låt $z = a + bi$, $w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.

$$\text{Då är } zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{VL} = |zw| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$$

$$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd} =$$

$$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$$

$$\text{HL} = |z| \cdot |w| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} =$$

$$= \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2}$$

Därmed är $\text{VL} = \text{HL}$ VSV

c) Låt $z = a + bi$, $w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.

$$\text{Då är } \frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\text{VL} = \left| \frac{z}{w} \right| = \sqrt{\frac{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}{(c^2 + d^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd}{(c^2 + d^2)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}}{c^2 + d^2}$$

$$\text{HL} = \frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)(c^2 + d^2)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}}{c^2 + d^2}$$

Därmed är $\text{VL} = \text{HL}$ VSV

d) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.

$$\text{VL} = \text{Re } z = a$$

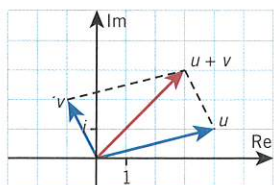
$$\text{HL} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) =$$

$$= \frac{1}{2}(a + bi + a - bi) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Därmed är $\text{VL} = \text{HL}$ VSV

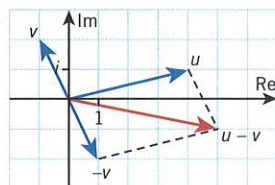
4202 a)



$$u + v = 3 + 3i$$

$$|u + v| = \sqrt{18}$$

b)



$$u - v = 5 - i$$

$$|u - v| = \sqrt{26}$$

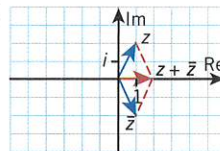
4203 Nej.

Motivering:

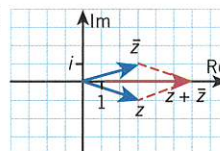
$$|u| = \sqrt{676} = 26$$

$$|z| = \sqrt{625} = 25$$

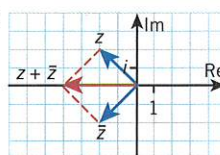
4204 a)



b)



c)



d) $z + \bar{z} = 2a$

Motivering:

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$$

4205 a) $|z - 4| = 4$

Ledtråd:

Cirkelns medelpunkt är $(4, 0) = 4$ och radien är 4.

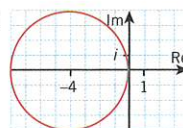
b) $|z - (4 + 4i)| = 4$

Ledtråd:

Cirkelns medelpunkt är $(4, 4) = 4 + 4i$ och radien är 4.

4206 a) Teckenfel i vänsterledet.

b)



4207 Tex $z = 10i$ eller

$$z = \sqrt{50} + \sqrt{50}i$$

Ledtråd:

Välj ett tal z så att $|z| = 10$ men inte $z = 10$ eller $z = -10$ eftersom det är reella tal.