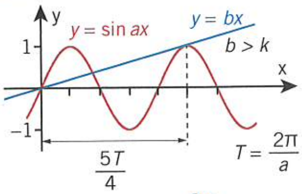
31 $v \approx 68{,}5°$
Ledtråd:
I parallelltrapetset är $h = 5 \sin v$ och $b = 10 + 2 \cdot 5 \cos v$. Ställ upp en formel och finn det största värdet grafiskt.

32 $\cos 1 \approx 0{,}54$
Ledtråd:
Tolka gränsvärdet som en derivata.

33 För $n = 4k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

34 a) $b \geq a$
Ledtråd:
Bestäm lutningen i origo.

b) $\frac{2a}{5\pi} < b < a$
Ledtråd:



$b > k$ i figuren, $T = \frac{2\pi}{a}$

35 **I** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1}$

II $\frac{A_1}{A_2} = \frac{n}{1}$

III $\frac{A_1}{A_2} = \frac{n}{1}$

4

4103 a) $\text{Re}\, z = 4$ $\quad \text{Im}\, z = 7$
b) $\text{Re}\, z = 0$ $\quad \text{Im}\, z = 2$
c) $\text{Re}\, z = 1$ $\quad \text{Im}\, z = -1$
d) $\text{Re}\, z = -2$ $\quad \text{Im}\, z = 6$
e) $\text{Re}\, z = 5$ $\quad \text{Im}\, z = 0$
f) $\text{Re}\, z = 2$ $\quad \text{Im}\, z = -\sqrt{2}$

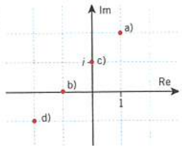
4104 Ja.
Motivering:
Vera har rätt eftersom de komplexa talen även innehåller de reella talen.

4105 a) $z = 2 + 3i$ $\quad$ c) $z = \pi$
b) $z = -1 + 4i$ $\quad$ d) $z = \sqrt{3}i$

4106 a) a är ett reellt tal **R**, $b=0$
b) $a = 0$, b är ett reellt tal **R**

4107 $z_1 = 3$ $\quad z_3 = -2 + i$
$z_2 = 1 + 2i$ $\quad z_4 = -i$

4108



4109 a) $z_1 = 12i$ $\quad z_2 = -12i$
b) $z_1 = 4i$ $\quad z_2 = -4i$
c) $z_1 = \sqrt{3}i$ $\quad z_2 = -\sqrt{3}i$
d) $z = \pm 8$

4110 a) $z_1 = -2 + i$ $\quad z_2 = -2 - i$
b) $z_1 = -3 + 4i$ $\quad z_2 = -3 - 4i$
c) $z_1 = -2 + 4i$ $\quad z_2 = -2 - 4i$
d) $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ $\quad z_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

4111 $x_1 = 3 + \sqrt{2}i$ $\quad x_2 = 3 - \sqrt{2}i$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$x^2 - 6x + 11 = 0$

4112 $(-1 + \sqrt{3}i)^2 + 2(-1 + \sqrt{3}i) + 4 =$
$= 1 - 3 - 2\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i + 4 = 0$

4113 *Förklaring:*
Ekvationen har lösningen $x = -2 \pm \sqrt{4 - a}$. Om $a > 4$ kommer talet under rottecknet att vara negativt och därmed kan vi inte få några reella rötter.

Historik: De komplexa talens historia

1 a) $x(12 - x) = 45$ ger
$x^2 - 12x + 45 = 0$
b) $x = 6 \pm 3i$

2 a) $x^2 - 20x + 125 = 0$
b) $x = 10 \pm 5i$

3 a) $5i/3$ $\quad$ c) $i^{3/2}$
b) i

4116 a) 3 $\quad$ c) $-4 - 2i$
b) $-1 + i$ $\quad$ d) $4 - 5i$

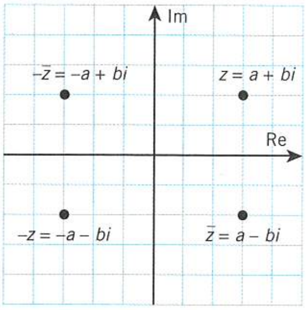
4117 a) $-2 + 2i$
b) $8 - 6i$
c) $-8 + 6i$
d) $-7 + 22i$

4118 a) $48 + 64i$
b) $-21 - 20i$
c) $-5 - 12i$
d) $5 + 12i$
e) 26
f) 5

4119 a) $z = -1 + i$
$\text{Re}\, z = -1$, $\text{Im}\, z = 1$
b) $z = -3$
$\text{Re}\, z = -3$, $\text{Im}\, z = 0$
c) $z = -1 - 7i$
$\text{Re}\, z = -1$, $\text{Im}\, z = -7$
d) $z = 5$
$\text{Re}\, z = 5$, $\text{Im}\, z = 0$

4120 a) $\bar{z} = 4 - i$, $|z| = \sqrt{17}$
Ledtråd:
Skillnaden mellan z och konjugatet $\bar{z}$ är att imaginärdelen har motsatt tecken.
Absolutbeloppet beräknas
$\sqrt{4^2 + 1^2}$
b) $\bar{z} = -3 - 2i$, $|z| = \sqrt{13}$
c) $\bar{z} = -1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$
d) $\bar{z} = 2$, $|z| = 2$
e) $\bar{z} = i$, $|z| = 1$
f) $\bar{z} = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$, $|z| = \sqrt{5}$

4121 Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Då är $-z = -a - bi$, $\bar{z} = a - bi$ och $-\bar{z} = -a + bi$. Dessa kan illustreras grafiskt på följande sätt



4122 a) $x = 1 \quad y = 1$
Ledtråd:
Realdelarna lika: $2x + y = 3$
Imaginärdelarna lika:
$x - y = 0$

b) $x = -1 \quad y = 3$

4123 a) $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$
Ledtråd:
Förläng med nämnarens konjugat och förenkla.

b) $-\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i$

c) $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

d) $\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$

4124 Motexempel:
Om $z = 1 + i$ så är
$\bar{z} = 1 - i$ och $-z = -1 - i$
$\bar{z} \neq -z$

4125 $|z| = \sqrt{12}$

4126 a) $\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z = 1$
Ledtråd:
Förläng med nämnarens konjugat.

b) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}, \mathrm{Im}\, z = 1$

c) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{10}, \mathrm{Im}\, z = \frac{3}{10}$

d) $\mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z = 1$

4127 Ja.
Motivering:
Ett komplext tal vars real- och imaginärdel är lika kan betecknas $z = a + ai$
där a är ett reellt tal.
$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + ai}{a - ai} = \frac{(a + ai)(a + ai)}{(a - ai)(a + ai)} =$
$= \frac{(2a^2 i)}{(2a^2)} = i$

4128 a) $z = 1 + 2i$ c) $z = 6 - 6i$
b) $z = 0{,}5i$ d) $4i$

4129 a) 1 b) 2

4130 a) $63 + 16i$
b) $\frac{49}{169} + \frac{219}{169}i$

4131 $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i = 0{,}8 + 0{,}6i$

4133 306

4134 a) 23 c) $\sqrt{68}$
b) 20 d) 40

4135 *Lösning:*
$\mathrm{VL} = (-1 - 3i)^3 + 3(-1 - 3i)^2$
$+ 12(-1 - 3i) + 10 =$
$= (26 + 18i) + 3(-8 + 6i)$
$- 2 - 36i = (26 - 24 - 2)$
$+ (18 + 18 - 36)i = 0 = \mathrm{HL}$
VSV

4136 a) $b = 1,\ a > -2$
b) $a = -\frac{b}{2}$

4137 $-\frac{1}{5} - \frac{34}{15}i$

4138 *Lösning:*
$\mathrm{HL} = \frac{1}{2i}(2 - 3i - (2 + 3i)) =$
$= \frac{1}{2i}(-6i) = -3 = \mathrm{Im}\, z = \mathrm{VL}$
V.S.V.

4139 *Lösning:*
$\mathrm{HL} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(5 - 2i)(5 + 2i)} =$
$= \sqrt{25 - 4i^2} = \sqrt{29} = |z| = \mathrm{VL}$
V.S.V.

4140 *Lösning:*
a) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.
Då är $\bar{z} = a - bi$ och
$\bar{\bar{z}} = a + bi$.
Därmed är $\mathrm{VL} = \bar{\bar{z}} = a + bi =$
$= z = \mathrm{HL}$ VSV

b) Låt $z = a + bi, w = c + di$,
där a, b, c, d är reella tal.
Då är $z - w = a + bi - (c + di) =$
$= (a - c) + (b - d)i$ och
$\overline{z - w} = (a - c) - (b - d)i$
$\mathrm{HL} = \bar{z} - \bar{w} = a - bi - (c - di) =$
$= (a - c) - (b - d)i = \mathrm{VL}$
VSV

c) Låt $z = a + bi, w = c + di$,
där a, b, c, d är reella tal.
Då är $z \cdot w =$
$= (a + bi)(c + di) =$
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$
och därmed
$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i$
$\mathrm{HL} = \bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) =$
$= (ac - bd) - (ad + bc)i = \mathrm{VL}$
VSV

d) Låt $z = a + bi, w = c + di$,
där a, b, c, d är reella tal.
Då är $\bar{z} = a - bi, \bar{w} = c - di$
och $\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} =$
$= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} =$
$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$
$\mathrm{VL} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} =$
$= \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$
$\mathrm{HL} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{a - bi}{c - di} =$
$= \frac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} =$
$= \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$
Därmed är $\mathrm{VL} = \mathrm{HL}$ V.S.V.