4331 $z_{p+1} = 5^{1/n}\left(\cos\left(\frac{90°}{n} + p\cdot\frac{360°}{n}\right) + \right.$
$\left. + \, i\sin\left(\frac{90°}{n} + p\cdot\frac{360°}{n}\right)\right)$ där
$p = 0, 1, 2, \dots, n-1$

4334 a) $z = 5e^{i\pi/2}$ b) $z = 5e^{i3\pi/4}$
$u = 5e^{i3\pi/2}$ $u = 5e^{i5\pi/4}$

4335 a) $e^{i\pi/2}$
Lösning:
$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$
b) $2e^{i\pi}$
c) $3e^{i3\pi/2}$
d) $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

4336 a) -1 b) 1
c) $\frac{1}{e^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \approx$
$\approx 0{,}025 + 0{,}043i$
d) $e(\cos 1 + i\sin 1) \approx$
$\approx 1{,}47 + 2{,}29i$

4337 $|z| = 6$
$\arg z = \pi/3$
$\text{Re}\, z = 3$
$\text{Im}\, z = 3\sqrt{3}$
Lösning:
$z = 6\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) =$
$= 6\cdot(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 3 + 3\sqrt{3}i$

4338 a) $i^3 = i^2\cdot i = -i$
b) Tre rötter $n = 0, 1, 2$
$z_1 = e^{i\pi/2}$
$z_2 = e^{i7\pi/6}$
$z_3 = e^{i11\pi/6}$

4339 a) $2\cdot e^{i\pi/6}$ b) $e^{\ln 2 + i\pi/6}$

4340 a) $15e^{i8\pi/15}$
b) $-13\,841\,287\,201$

4341 a) $\exp(2 \pm 3\pi i) = e^{2\pm 3\pi i} =$
$= e^2\cdot e^{\pm 3\pi i} = e^2(\cos(\pm 3\pi) +$
$+ \, i\sin(\pm 3\pi)) =$
$= e^2(\cos(\pi) + 0) = -e^2$

b) $\exp\left(\frac{2+\pi i}{4}\right) = e^{1/2 + i\pi/4} =$
$= \sqrt{e}\cdot e^{i\pi/4} =$
$= \sqrt{e}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) =$
$= \sqrt{e}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) =$
$= \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

4342 a) $z = i\left(\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi\right)$
b) $z = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi\right)$

4343 a) $\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \frac{1}{2}$
$(\cos v + i\sin v + \cos(-v) +$
$+ \, i\sin(-v)) = \frac{1}{2}(2\cos v) =$
$= \cos v$
Ledtråd:
Kom ihåg att
$\cos(-v) = \cos v$ och
$\sin(-v) = -\sin v$

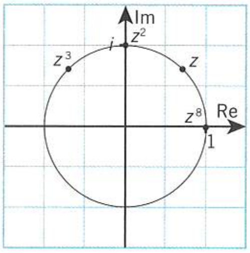
b) $\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \frac{1}{2i}(\cos v +$
$+ \, i\sin v - \cos(-v) -$
$- \, i\sin(-v)) = \frac{1}{2i}(2i\sin v) =$
$= \sin v$

Historik: Euler – en produktiv matematiker

1 Felet består i att man antagit att rotlagarna gäller för negativa tal.

2 Eulers formel ger
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi =$
$= -1 + i\cdot 0 = -1$ och därmed är
$e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0.$

3 a) $8e^{i\pi/2}$
b) $2e^{-i\pi/6} = 2e^{i11\pi/6}$
c) $16e^{i\pi/3}$

4


5 a) $6e^{i\pi/6}$
b) $\frac{27}{4}e^{-i\pi/6} = \frac{27}{4}e^{i11\pi/6}$

6 a) $e^3(\cos 1 + i\sin 1) \approx 10{,}9 + 16{,}9i$
b) $e\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= e\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \approx -1{,}92 + 1{,}92i$

7 $\text{VL} = e^{2+\frac{\pi i}{3}} = e^2\cdot e^{\frac{\pi i}{3}} =$
$= e^2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$
$= e^2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^2(1 + i\sqrt{3}) = \text{HL}$

8 a) $\cos i = \frac{e^{-1} + e}{2}$
b) $\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i}$
c) $\ln i = i\frac{\pi}{2}$
d) $i^i = e^{-\pi/2}$
Ledtråd:
a) och b) Utgå från Eulers formel
c) Utgå från om $z = \ln i$ så är $e^z = i$ och $z = i\frac{\pi}{2}$
d) Utgå från $i^i = e^{i\ln i} = e^{-\pi/2}$

4403 a) $x = \pm 5$ d) $x = \pm\sqrt{50}$
b) $x = \pm 5i$ e) $x = \pm 2$
c) $x = \pm\sqrt{50}\cdot i$ f) $x = \pm 2i$

4404 a) $x = 4 \pm 3i$
b) $x_1 = 1$ $x_2 = 7$
c) $x = 5 \pm 2i$
d) $z = -2 \pm 5i$

4405 T ex $(x-3)(x-3i)=0$
som kan skrivas
$x^2-(3+3i)x+9i=0$

4406 a) $x_1=i \quad x_2=-3i$
b) $x_1=i \quad x_2=-2i$
c) $x_1=i/2 \quad x_2=-2i$
d) $x_1=2i \quad x_2=-6i$

4407 $z=1-5i$
Motivering:
Rötterna är konjugerade tal.

4408 Per har fel och Stina har rätt. Han glömmer att koefficienterna måste vara reella för att rötterna ska vara konjungerande tal. Lösningsformeln ger att
$z=-2i\pm 3i$
$z_1=i \quad z_2=-5i$

4409 Om $z^2=w$
a) $z_1=4e^{i\pi/4} \quad z_2=4e^{i5\pi/4}$
b) $z=\pm 5(\cos 36° + i\sin 36°)$
som också kan skrivas
$z_1=5(\cos 36° + i\sin 36°)$
$z_2=5(\cos 216° + i\sin 216°)$
c) $z=\pm\sqrt{10}\,(\cos 5° + i\sin 5°)$
d) $z_1=3e^{i\pi/3} \quad z_2=3e^{i4\pi/3}$

4410 $z^2-10z+29=0$
Ledtråd:
Rötterna är konjugerade tal.
$(z-(5+2i))(z-(5-2i))=0$

4411 a) $q=17$ b) $z=4\pm i$

4412 a) $z_1=1+i \quad z_2=-1-i$
Ledtråd:
Lös ekvationen på två sätt; med hjälp av de Moivres formel resp genom att ansätta
$z=a+bi$.
b) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$
$z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

4413 $z_1=2i, \quad z_2=-4$
Ledtråd:
$$z=-\frac{4-2i}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4-2i}{2}\right)^2+8i}=$$
$$=-2+i\pm\sqrt{3+4i}=$$
$$=-2+i\pm\sqrt{(2+i)^2}$$

4414 a) Rötternas summa $=20$
Rötternas produkt $=109$
b) Rötternas summa $=-p$
Rötternas produkt $=q$

4415 $z_1=3-2i, \quad z_2=-3+2i$
Ledtråd:
Ansätt $z=a+bi$

4417 a) $\frac{261}{3}=87$ b) $\frac{1\,169}{7}=167$

4418 a) Kvot $=62$
Rest $=5$
b) Kvot $=1\,178$
Rest $=6$

4419 a) Kvot $=x^2+4x+3$
Rest $=0$
b) Kvot $=x^2+3x-4$
Rest $=0$

4420 a) Kvot $=7x+8$
Rest $=0$
b) Kvot $=4x^2+x+1$
Rest $=-6$
Ledtråd:
Skriv $4x^3-3x^2+0x-7$ i den liggande stolen.

4421 a) Kvot $=x^3+2$
Rest $=x-6$
b) Kvot $=x^4+3$
Rest $=-3x+1$

4422 a) 17
Lösning:
$5\cdot 3+2=17$
b) x^2-4
c) $x^5+3x^3+3x^2+x+6$
Lösning:
$(x^3+2)(x^2+3)+(x^2+x)=$
$=x^5+3x^3+3x^2+x+6$

4423 a) $k=12$
b) $k=-6$
Ledtråd:
Kvoten $=x^2-3$
c) $k=-4$
d) $k=40$
Ledtråd:
Kvoten $=$
$=x^4-2x^3+4x^2-8x+20$

4424 Kvoten blir $z^2+iz-1+i$

4425 $p(x)=(x+2)(x+1)(x-4)$
Ledtråd:
Dividera polynomet med $(x-4)$.

4426 Resten kan högst vara ett andragradspolynom.
Motivering:
Divisionsalgoritmen stannar när resten är mindre än divisorn x^3+1. För polynom betyder mindre än att graden hos resten är lägre än hos divisorn.

4429 a) $x_1=-4 \quad x_2=2 \quad x_3=5$
b) $(x+3)(x-6)^2=0$ som kan skrivas $x^3-9x^2+108=0$

4430 a) $x-1$
Motivering:
$p(1)=0$ betyder att $(x-1)$ en faktor till $p(x)$.
b) $x=-4$

4431 a) Sant
Motivering:
$p(2)=2^3-3\cdot 2-2=0$
b) Falskt
Motivering:
$p(-1)=(-1)^3-1-2=-4$
Polynomet är inte delbart med $x-(-1)=x+1$
Resten blir -4
c) Sant
Motivering:
$f(1)=5$
d) Sant
Motivering:
$g(-10)=0$

4432 a) 8 b) 0 c) -4 d) -2

4433 a) $f(1)=0$ c) $p(2)=0$
b) $g(-1)=0$ d) $h(-3)=0$

4434 Ja.
Motivering:
$x=3$ är ett nollställe till polynomet, $f(3)=0$
Det betyder att $(x-3)$ är en faktor i polynomet.

4435 $f(x)=2x^3+2x^2-4x$
Ledtråd:
$f(x)=k(x-1)(x-0)(x+2)$
$f(-1)=4$ ger $k=2$