

1. Bestäm $|z|$ om $z = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + (-1+\sqrt{12})i$. Svara exakt på så enkel form som möjligt.
2. Förenkla uttrycket $\left| \frac{2z_1 + z_2 - 5 - i}{2z_2 - z_1 + 3 - i} \right|^2$ så långt som möjligt då $z_1 = 3 - 2i$ och $z_2 = 2 + i$.
3. Förenkla uttrycket $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{96}$ så långt som möjligt med hjälp av de Moivres formel.
4. Bestäm det reella talet t så att uttrycket $\frac{1}{2-i} + \frac{2t}{1+i}$ blir reellt, samt beräkna uttryckets värde i detta fall.
5. Bestäm det reella talet t , $t > 0$, så att uttrycket $\frac{t}{1+3i} - \frac{9-2i}{2ti}$ blir reellt. Svara exakt.
6. Visa att uttrycket $z^2 + \bar{z}^2 + |z|^2$ alltid antar reella värden för godtyckliga komplexa tal z .
7. Visa att uttrycket $\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$ alltid är rent imaginärt för godtyckliga komplexa tal z .
8. Betrakta det komplexa talet $z = a + bi$, där $b \neq 0$.
För vilket värde på a gäller att $z + z^2$ är reellt?
9. För det komplexa talet z gäller att $|z| = \sqrt{8}$. Visa att uttrycket $z - \frac{8}{z}$ är rent imaginärt.
10. Man har det komplexa talet $z = 2 + ai$.
För vilka värden på den reella konstanten a är z^3 reellt?
11. Lös nedanstående problem.
 - a) Martin påstår att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller för **alla** komplexa tal z_1 och z_2 . Ge argument varför det måste vara falskt.
 - b) Viktor påstår att det finns minst **två** komplexa tal z_1 och z_2 , båda skilda från noll, för vilka likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller.
Ge argument varför det måste vara sant.
 - c) Gustav inser dessutom att det går att finna **många** sådana par av komplexa tal z_1 och z_2 . Undersök och beskriv hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ska gälla.
Motivera dina slutsatser.



12. Visa att för de två komplexa talen z och w gäller att $\left| \frac{z-w}{z \cdot \bar{w} - 1} \right| = 1$ om $|z| = 1$ och $z \neq w$.

13. Bestäm de komplexa tal z med absolutbeloppet 1 för vilka $|z - i| = 1$.

14. Man har de komplexa talen $u = 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right)$,

$$z = 6 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \text{ och } w = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

a) Bestäm talet $u^2 \cdot z^2 \cdot w^2$ på polär form. b) Ge svaret på formen $a + bi$.

15. Man har de komplexa talen $u = 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right)$,

$$z = 6 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \text{ och } w = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

a) Bestäm talet $\frac{uz}{w^2}$ på polär form, där argumentet ges i intervallet $0 \leq \arg \frac{uz}{w^2} \leq 2\pi$.

b) Ge också svaret exakt på formen $a + bi$.

16. Skriv följande uttryck i polär form. Svara exakt och låt argumentet ligga mellan 0° och 360° .

$$(\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ) \cdot \frac{3}{4} \cdot (\cos(-15^\circ) - i \sin 15^\circ) \cdot 16 \cdot (\cos 105^\circ - i \sin 105^\circ)$$

Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

17. Skriv följande uttryck i polär form och svara exakt. Låt argumentet ligga mellan 0° och 360° .

$$2^5 \cdot (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)^2 \cdot (\cos 195^\circ - i \sin 195^\circ) \cdot 4^{-2} \cdot (\cos(-15^\circ) - i \sin 15^\circ)^5$$

Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

18. Skriv följande uttryck i polär form och svara exakt. Låt argumentet ligga mellan 0° och 360° .

$$\frac{(2 \cdot (\cos 144^\circ + i \sin 144^\circ))^3}{(\cos 12^\circ - i \sin 12^\circ) \cdot \sqrt{32} \cdot (\cos(-32^\circ) - i \sin 32^\circ)}$$

Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

19. Skriv följande uttryck i polär form och svara exakt.

$$\frac{\left(3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right) \right)^3}{\sqrt{3} \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) - i \sin \frac{\pi}{12} \right) \cdot 18 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{10} - i \sin \frac{\pi}{10} \right)}$$

Ange vilka trigonometriska satser/samband du använder.

20. Det komplexa talet z har absolutbeloppet 2 och argumentet $\frac{\pi}{3}$.

Bestäm för det komplexa talet $w = \frac{z-1}{z^3+1}$

- a) $|w|$ b) $\arg w$, som uppfyller villkoret $0 \leq \arg w \leq 2\pi$.

21. Förenkla uttrycket $\frac{z^5}{(\bar{z})^4}$ så långt som möjligt då $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Om polär form användes skall räkningarna göras med radianer.

22. Förenkla uttrycket $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6$ så långt som möjligt.

23. Lös ekvationen $z^4 + 2\sqrt{3} + 2i = 0$. Svaret ges i polär form.
Argumenten skall vara större än noll.

24. Lös ekvationen $z^4 + 7iz^2 + 8 = 0$. Svara på formen $a + bi$.

25. Bestäm samtliga kubikrötter till det komplexa talet $4 + 4i\sqrt{3}$. Svara i polär form.

26. Lös ekvationen $z^4 + z^2 + 1 = 0$. Svara på formen $a + bi$.

27. Faktorisera uttrycket $z^4 - 8iz$.

28. Bestäm en reell och en icke-reell rot till ekvationen $e^z - \frac{3}{e^z} = 2$.

För den icke-reella roten gäller att $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

29. Ekvationen $z^2 - 6z + a = 0$ har rötterna $z_1 = 2$ och $z_2 = 4$ då $a = 8$.

Undersök var i det komplexa talplanet ekvationens rötter hamnar för alla möjliga reella värden på a .

(Nationellt prov, kurs E, vt 1999)

30. Ekvationen $z^2 + 2z + q = 0$ har rötterna $z_1 = 1$ och $z_2 = -3$ då $q = -3$.

Undersök var i det komplexa talplanet ekvationens rötter hamnar för alla möjliga reella värden på q .

31. Ekvationen $z^2 + z + q^2 = 0$ har rötterna $z_1 = \frac{1}{4}$ och $z_2 = -\frac{3}{4}$ då $q = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Undersök var i det komplexa talplanet ekvationens rötter hamnar för alla möjliga reella värden på q .

32. Visa att talet i^i kan förenklas, så att man ser att det är ett reellt tal.

33. Man har de komplexa talen $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ och $z_2 = 2e^{-\frac{\pi i}{4}}$.

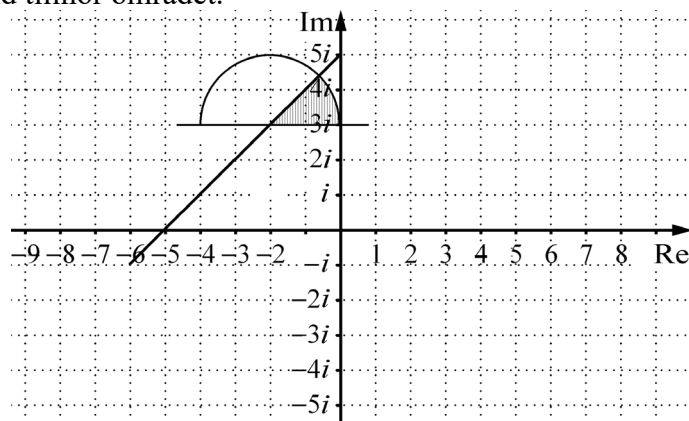
Beräkna absolutbelopp och argument för talet $w = \frac{z_1 \cdot z_2^2}{z_1}$.

34. Det positiva reella talet a har ett sådant värde, att $z = \frac{10}{a} \cdot e^{\frac{\pi i}{a}}$ ligger på enhetscirkeln i det komplexa talplanet. Bestäm $\operatorname{Re} z$ för detta värde på a .

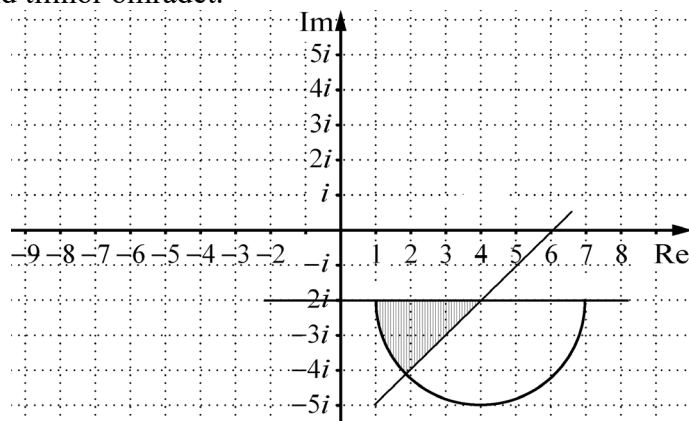
35. Beräkna $z^3 + z + \bar{z}$ då $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$. Ge svaret på formen $a + bi$.

36. Visa att värdet av $\ln i^{\frac{2i}{\pi}}$ är ett reellt tal. Ange också värdet.

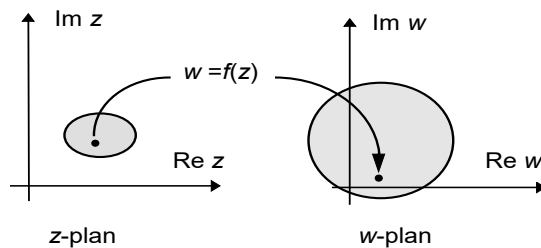
37. Ett område i det komplexa talplanet begränsas av en cirkelbåge och två linjer enligt figur. Beskriv med olikheter de villkor som gäller för de tal z som ligger i området. Områdets rand tillhör området.



38. Ett område i det komplexa talplanet begränsas av en cirkelbåge och två linjer enligt figur. Beskriv med olikheter de villkor som gäller för de tal z som ligger i området. Områdets rand tillhör området.



39. Ett område i matematiken kallas komplex analys. Där studerar man funktioner $w = f(z)$ som avbildar en talmängd i det komplexa talplanet (z -planet) på ett annat komplext talplan (w -planet).

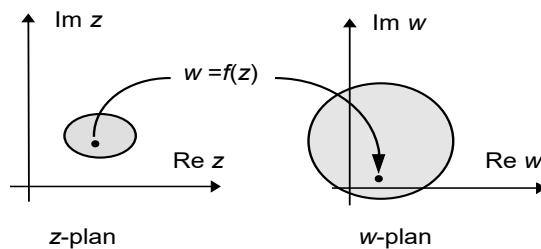


De tre komplexa talen 0 , 2 och $2 + 2i$ utgör hörn i en rätvinklig triangel i z -planet. Triangeln avbildas på w -planet med hjälp av funktionen $w = f(z)$, där $f(z) = z^2$.

- Markera i w -planet bilderna av triangelns hörn.
- Undersök hur triangelns hypotenusa avbildas på w -planet.
- Bestäm bilderna av triangelns övriga sidor.

(Nationellt prov, kurs E, vt 1996)

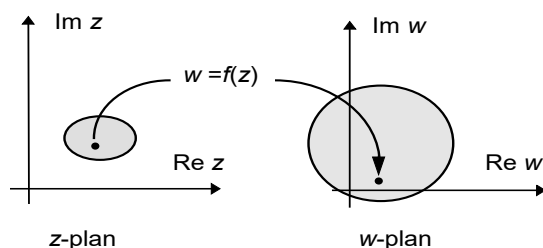
40. Med den komplexvärda funktionen $w = f(z)$ kan man avbilda komplexa tal i z -planet på ett annat komplext talplan, w -planet. Se figuren nedan.



I denna uppgift gäller att $w = z^2 + 1$.

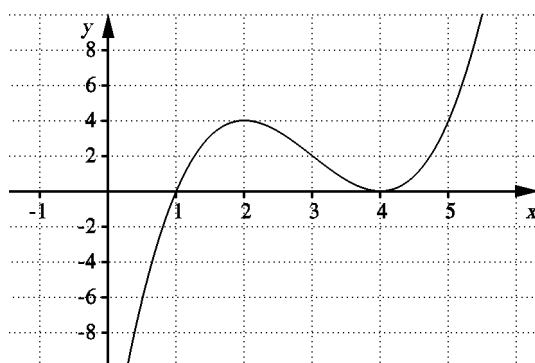
- Vi har de komplexa talen $z_1 = 2i$ och $z_2 = 2 + 2i$. Markera i ett w -plan talen $w_1 = f(z_1)$ och $w_2 = f(z_2)$.
- Vilka värden gäller för $\operatorname{Re} w$ om talen z på sträckan från $2i$ till $2 + 2i$ i z -planet avbildas med den angivna funktionen?
- Välj en annan sträcka i z -planet, nämligen den mellan talet 1 och talet $1 + 2i$. Rita bilden av denna sträcka i w -planet.

41. Med den komplexvärda funktionen $w = f(z)$ kan man avbilda komplexa tal i z -planet på ett annat komplext talplan, w -planet. Se figuren nedan.

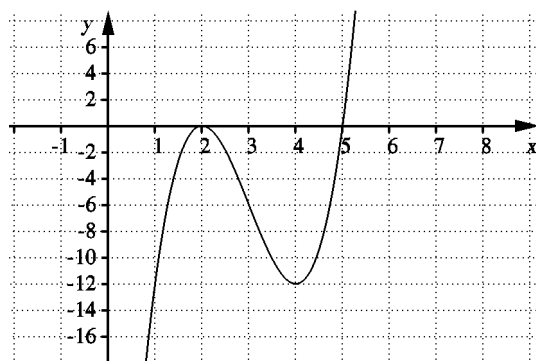


I denna uppgift gäller att $w = (z-1)^2$.

- Vilka värden gäller för $\operatorname{Re} w$ om talen z på sträckan från $2i$ till $2+2i$ i z -planet avbildas med den angivna funktionen?
 - Välj en annan sträcka i z -planet, nämligen den mellan talet 0 och talet $2i$. Rita bilden av denna sträcka i w -planet.
42. Bestäm konstanterna a och b så att följande division går jämnt upp
- $$\frac{x^6 - x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + (2a-1) \cdot x + b}{x^2 - x - 2}$$
43. Man har polynomet $p(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 12$, där a och b är konstanter.
- Bestäm konstanterna a och b så att polynomet $p(x)$ är jämnt delbart med polynomet $x^2 - 4x + 3$.
 - Lös ekvationen $p(x) = 0$ fullständigt. De erhållna värdena på a och b skall användas.
44. Man har i figuren ritat grafen till en polynomfunktion med gradtal 3. Bestäm ekvationen till en annan polynomfunktion med gradtal 3, som har samma nollställen, men som har sin maximipunkt i punkten $(2, 10)$.
Verifiera också att din kurva verkligen har en maximipunkt då $x = 2$.



45. Man har i figuren ritat grafen till en polynomfunktion $y = p(x)$ med gradtal 3.



- a) Bestäm ekvationen för kurvan i figuren.
- b) Bestäm ekvationen för en annan polynomkurva med gradtal 3, som har samma nollställen som den ritade funktionen, men som har sin minimipunkt i punkten $(4, -6)$.
46. Ange en polnomekvation $p(x) = 0$ av fjärde graden, som bara har reella koefficienter och som uppfyller följande villkor:
- 1) Ekvationen skall ha två reella rötter och två komplexa rötter.
 - 2) I de komplexa rötterna är varken realdelarna eller imaginärdelarna lika med noll.
47. Ett eller flera av följande påståenden är sant. Vilket eller vilka?
- a) Om talet z uppfyller $|z - 4| = |z - 2i|$ och $z = x + iy$ så gäller sambandet $y = 2x - 3$ mellan talets imaginärdel och realdel.
- b) Alla tal z som uppfyller olikheten $2 \leq |z - 1 + i| \leq 3$ kan åskådliggöras i ett komplext talplan med en cirkelring, där cirkelarna har radierna 2 och 3 längdenheter. Båda cirkelarna har sin medelpunkt i punkten $-1 + i$.
- c) De tal z som uppfyller villkoren $\operatorname{Im} z \geq 2$ och $|z - i| \leq 4$ bildar tillsammans en halvcirkel.
- d) Man vet att $z = i$ är en rot till ekvationen $z^3 - iz^2 - z + i = 0$. Då kan de övriga rötterna beräknas och de blir reella.
- e) För två godtyckliga komplexa tal z och w gäller $|z + w| = |z| + |w|$.

48. Ett eller flera av följande påståenden är sant. Vilket eller vilka?

- a) De tal z som uppfyller villkoren $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 1$ och $|z - 1| \leq 2$ bildar tillsammans en kvartscirkel i det komplexa talplanet.
- b) För två godtyckliga komplexa tal z och w gäller $|z + w| = |z| + |w|$.
- c) Alla tal z som uppfyller olikheten $2 \leq |z - 1 + i| \leq 3$ kan åskådliggöras i ett komplext talplan med en cirkelring, där cirkelarna har radierna 2 och 3 längdenheter. Båda cirkelarna har sin medelpunkt i punkten $-1 + i$.
- d)
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{101} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
- e) Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ saknar komplexa rötter.

49. Ett eller flera av följande påståenden är sant. Vilket eller vilka?

- a) Alla tal som uppfyller olikheten $4 \leq |z + 5 + 2i| \leq 9$ kan åskådliggöras i ett komplext talplan med en cirkelring, där cirkelarna har radierna 4 och 9 längdenheter. Båda cirkelarna har sin medelpunkt i punkten $-5 - 2i$.
- b) De tal z som uppfyller villkoren $\operatorname{Im} z \geq 2$ och $|z - i| \leq 4$ bildar tillsammans en halvcirkel.
- c) Om talet z uppfyller $|z - 2| = |z + 4i|$ och $z = x + iy$ så gäller sambandet $y = 1 - x$ mellan talets imaginärdel och realdel.
- d) De tal z som uppfyller villkoren $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 1$ och $|z - 1| \leq 2$ bildar tillsammans en kvartscirkel i det komplexa talplanet.
- e) Om talet z uppfyller $|z - 4| = |z - 2i|$ och $z = x + iy$ så gäller sambandet $y = 2x - 3$ mellan talets imaginärdel och realdel.

50. Ett eller flera av följande påståenden är sant. Vilket eller vilka?

- a)
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{101} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
- b) Det är bara ett lustigt sammanträffande att formlerna för argumentet för z^n och naturliga logaritmen för x^n ser likadana ut till formen: $\arg z^n = n \arg z$ och $\ln x^n = n \ln x$. Bevisen för dessa formler har inga samband.
- c) En ekvation av typen $z^n = a$, där n är ett positivt tal, har alltid n stycken rötter, reella eller komplexa.
- d) Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ saknar komplexa rötter.
- e) Alla tal z som uppfyller olikheten $2 \leq |z - 1 + i| \leq 3$ kan åskådliggöras i ett komplext talplan med en cirkelring, där cirkelarna har radierna 2 och 3 längdenheter. Båda cirkelarna har sin medelpunkt i punkten $-1 + i$.

51. Ett eller flera av följande påståenden är falskt. Vilket eller vilka?
- a) En ekvation av typen $z^n = a$, där n är ett positivt tal, har alltid n stycken rötter, reella eller komplexa.
 - b) De tal z som uppfyller villkoren $\operatorname{Im} z \geq 2$ och $|z - i| \leq 4$ bildar tillsammans en halvcirkel.
 - c) Man vet att $z = i$ är en rot till ekvationen $z^3 - iz^2 - z + i = 0$. Då kan de övriga rötterna beräknas och de blir reella.
 - d) Om talet z uppfyller $|z - 4| = |z - 2i|$ och $z = x + iy$ så gäller sambandet $y = 2x - 3$ mellan talets imaginärdel och realdel.
 - e) Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ saknar komplexa rötter.
52. Ett eller flera av följande påståenden är falskt. Vilket eller vilka?
- a) Det är bara ett lustigt sammanträffande att formlerna för argumentet för z^n och naturliga logaritmen för x^n ser likadana ut till formen: $\arg z^n = n \arg z$ och $\ln x^n = n \ln x$. Bevisen för dessa formler har inga samband.
 - b) För två godtyckliga komplexa tal z och w gäller $|z + w| = |z| + |w|$.
 - c) Om talet z uppfyller $|z - 2| = |z + 4i|$ och $z = x + iy$ så gäller sambandet $y = 1 - x$ mellan talets imaginärdel och realdel.
 - d) En ekvation av typen $z^n = a$, där n är ett positivt tal, har alltid n stycken rötter, reella eller komplexa.
 - e) Alla tal z som uppfyller olikheten $2 \leq |z - 1 + i| \leq 3$ kan åskådliggöras i ett komplext talplan med en cirkelring, där cirkelarna har radierna 2 och 3 längdenheter. Båda cirkelarna har sin medelpunkt i punkten $-1 + i$.
53. Ett eller flera av följande påståenden är falskt. Vilket eller vilka?
- a) Om talet z uppfyller $|z - 4| = |z - 2i|$ och $z = x + iy$ så gäller sambandet $y = 2x - 3$ mellan talets imaginärdel och realdel.
 - b) Alla tal som uppfyller olikheten $4 \leq |z + 5 + 2i| \leq 9$ kan åskådliggöras i ett komplext talplan med en cirkelring, där cirkelarna har radierna 4 och 9 längdenheter. Båda cirkelarna har sin medelpunkt i punkten $-5 - 2i$.
 - c) Det är bara ett lustigt sammanträffande att formlerna för argumentet för z^n och naturliga logaritmen för x^n ser likadana ut till formen: $\arg z^n = n \arg z$ och $\ln x^n = n \ln x$. Bevisen för dessa formler har inga samband.
 - d) För två godtyckliga komplexa tal z och w gäller $|z + w| = |z| + |w|$.
 - e) De tal z som uppfyller villkoren $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 1$ och $|z - 1| \leq 2$ bildar tillsammans en kvartscirkel i det komplexa talplanet.

54. Ett eller flera av följande påståenden är falskt. Vilket eller vilka?

- a) Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ saknar komplexa rötter.
- b) Om talet z uppfyller $|z - 4| = |z - 2i|$ och $z = x + iy$ så gäller sambandet $y = 2x - 3$ mellan talets imaginärdel och realdel.
- c) De tal z som uppfyller villkoren $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 1$ och $|z - 1| \leq 2$ bildar tillsammans en kvartscirkel i det komplexa talplanet.
- d)
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{101} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
- e) Man vet att $z = i$ är en rot till ekvationen $z^3 - iz^2 - z + i = 0$. Då kan de övriga rötterna beräknas och de blir reella.

F A C I T

1. $2\sqrt{5}$
2. 1
3. 1
4. $t = 0,2$, uttryckets värde: 0,6
5. $\sqrt{15}$
6. $z = a + bi$ ger uttrycket $3a^2 - b^2$
7. $z = a + bi$ ger uttrycket $\frac{4ab}{a^2 + b^2}i$
8. -0,5
9. $z = a + bi$ ger uttrycket $2bi$
10. $a = 0$ eller $a = \pm 2\sqrt{3}$
11. a)
 Antag att $z_1 = 3 + 2i$ och $z_2 = 5 - 5i$
 $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
 $VL = |z_1 + z_2| =$
 $= |3 + 2i + 5 - 5i| =$
 $= |8 - 3i| = \sqrt{64 + 9} =$
 $= \sqrt{73} \approx 8,54$
 $HL = |z_1| + |z_2| =$
 $= |3 + 2i| + |5 - 5i| =$
 $= \sqrt{9 + 4} + \sqrt{25 + 25} =$
 $= \sqrt{13} + \sqrt{50} \approx 10,7$
 $VL \neq HL!$
 Eftersom likheten inte gäller för dessa komplexa tal kan den inte gälla för alla komplexa tal. Även geometriska resonemang är tänkbara här.

 b)
 Antag att $z_1 = 3 + 3i$ och $z_2 = 5 + 5i$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

$$VL = |z_1 + z_2| =$$

$$= |3 + 3i + 5 + 5i| =$$

$$= |8 + 8i| = \sqrt{64 + 64} =$$

$$= \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$HL = |z_1| + |z_2| =$$

$$= |3 + 3i| + |5 + 5i| =$$

$$= \sqrt{9 + 9} + \sqrt{25 + 25} =$$

$$= \sqrt{18} + \sqrt{50} =$$

$$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$VL = HL!$$

Eftersom likheten gäller för dessa två komplexa tal gäller den för minst två komplexa tal. Även geometriska resonemang är tänkbara här.

c)

Låt $z_1 = A(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ och

$$z_2 = B(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| \\ |A(\cos \alpha + i \sin \alpha) + B(\cos \beta + i \sin \beta)| &= A + B \\ \sqrt{(A \cos \alpha + B \cos \beta)^2 + (A \sin \alpha + B \sin \beta)^2} &= A + B \\ \sqrt{A^2 \cos^2 \alpha + 2AB \cos \alpha \cos \beta + B^2 \cos^2 \beta + A^2 \sin^2 \alpha + 2AB \sin \alpha \sin \beta + B^2 \sin^2 \beta} &= A + B \\ \sqrt{A^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + B^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + 2AB (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)} &= A + B \\ \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta)} &= A + B \end{aligned}$$

Enligt trigonometriska ettan är

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$$

och enligt subtraktionsformeln för cosinus gäller att

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= \cos(\alpha - \beta)$$

och vi får efter kvadrering av VL och HL:

$$A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= A^2 + 2AB + B^2$$

För att likhet skall gälla

måste $\cos(\alpha - \beta) = 1$. Detta är ett nödvändigt och tillräckligt villkor.

$$\cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\alpha - \beta = \pm 0^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \beta + n \cdot 360^\circ, \text{ där } n \text{ är ett heltal}$$

Eftersom α och β är argument för de två komplexa talen och dessa är lika eller skiljer sig på ett helt antal varv så måste de två talen ligga på samma stråle, som utgår från origo, när de representeras av visare/punkter i det komplexa talplanet. Man kan även ansätta rektangulära koordinater eller komma fram till rätt slutsats genom att utföra geometriska resonemang.

12. ---

$$13. \quad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$14. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & 2304 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ \text{b)} \quad & -2304i \end{aligned}$$

$$15. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{3}{4} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \\ \text{b)} \quad & \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8}i \end{aligned}$$

16. $12(\cos 305^\circ + i \sin 305^\circ)$. Använda satser: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$ bör nämnas.

17. $2(\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$. Använda satser: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\arg z^n = n \arg z$, $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$ bör nämnas.

18. $\sqrt{2} \cdot (\cos 116^\circ + i \sin 116^\circ)$. Använda satser: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\arg z^n = n \arg z$, $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$ bör nämnas.

19. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\cos \frac{23\pi}{60} + i \sin \frac{23\pi}{60} \right)$. Använda satser: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\arg z^n = n \arg z$, $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$ bör nämnas.

20. a) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ b) $\frac{3\pi}{2}$

21. 2

22. -1

23. $z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right) \right)$
där $k = 0, 1, 2$ och 3 .

24. $z = \pm(2 - 2i), z = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

25. $\begin{cases} 2 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \\ 2 \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right) \\ 2 \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right) \end{cases}$

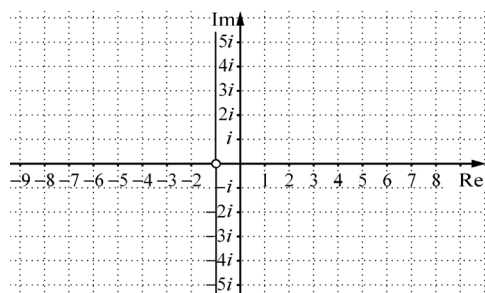
26. $z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, z = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

27. $z(z + 2i)(z + \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} - i)$

28. $z_1 = \ln 3, z_2 = \pi i$

29. Reella lösningar erhålles då $a \leq 9$.
För $a > 9$ fås rötterna $3 \pm bi$
där b varierar beroende på a .

30. Reella lösningar erhålles då $q \leq 1$, dvs
lösningarna ligger då på reella axeln.
 $q > 1$ ger komplexa rötter:
 $z = -1 \pm bi$, där $b = \sqrt{q-1}$. Rötterna
ligger på linjen $\operatorname{Re} z = -1$. Se figur
nedan. Punkten $z = -1$ är ej medtagen
i figuren; ty det är en reell rot som
antas för $q = 1$.



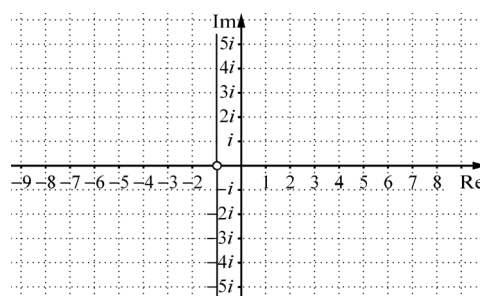
31. Reella lösningar erhålles då
 $-\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2}$, dvs. lösningarna ligger
då på reella axeln.

$q > \frac{1}{2}$ eller $q < -\frac{1}{2}$ ger komplexa

rötter: $z = -\frac{1}{2} \pm bi$, där $b = \sqrt{q^2 - \frac{1}{4}}$.

Rötterna ligger på linjen $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$.

Se figur nedan. Punkten $z = -\frac{1}{2}$ är ej
medtagen i figuren; ty det är en reell
rot som antas för $q = \pm \frac{1}{2}$.



32. $e^{\frac{\pi}{2}}$

33. $|w| = 4, \arg w = \frac{\pi}{6}$

34. $a = 10$ ger $\operatorname{Re} z = \cos \frac{\pi}{10}$

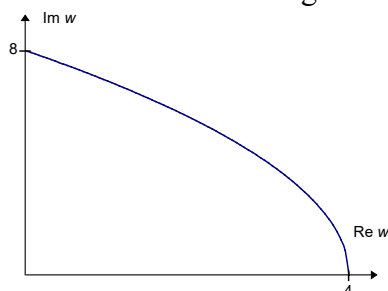
35. $2i$

36. -1

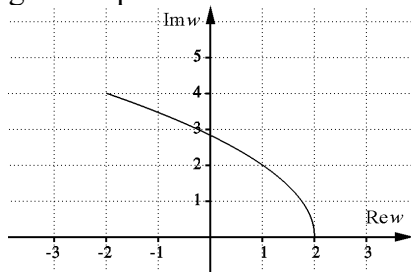
37. $|z + 2 - 3i| \leq 2, \operatorname{Im} z \geq 3$
och $\operatorname{Im} z \leq \operatorname{Re} z + 5$

38. $|z - 4 + 2i| \leq 3, \operatorname{Im} z \leq -2$
och $\operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z - 6$

39. a) Eleven har markerat talen 0, 4 och $8i$
 b) Bilden av triangelns hypotenusan är i w -planet sträckan mellan origo och talet $8i$.
 c) Sträckan i z -planet mellan 0 och 2 avbildas i w -planet på sträckan mellan 0 och 4 och sträckan mellan 2 och $2+2i$ avbildas i w -planet enligt bilden nedan. Om $w = x + yi$ är $y = 4\sqrt{4-x}$ där $0 \leq x \leq 4$, vilket är den kurva som ritats i diagrammet.

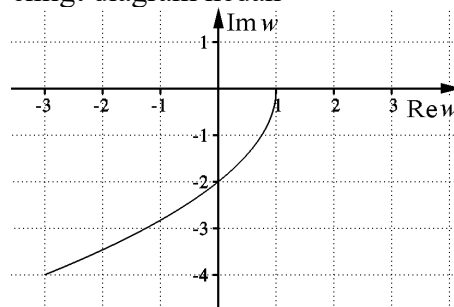


40. a) Eleven har markerat talen -3 och $1+8i$
 b) $-3 \leq \operatorname{Re} w \leq 1$
 c) Sträckan avbildas på följande graf i w -planet.



Om $w = x + yi$ är $y = \sqrt{8-4x}$ där $-2 \leq x \leq 2$ vilket är den kurva som ritats i diagrammet.

41. a) $-4 \leq \operatorname{Re} w \leq -3$
 b) Den angivna sträckan avbildas enligt diagram nedan



Om $w = x + yi$ är $y = \sqrt{4-4x}$ där $-3 \leq x \leq 1$ vilket är den kurva som ritats i diagrammet.

42. $a = 9$, $b = 6$
 43. a) $a = 7$, $b = -16$
 b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$
 44. $y = 2,5x^3 - 22,5x^2 + 60x - 40$
 45. a) $p(x) = 3x^3 - 27x^2 + 72x - 60$
 b) $y = 1,5x^3 - 13,5x^2 + 36x - 30$
 46. Ex. $(x^2 - 1)(x - 2 - i)(x - 2 + i) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5$
 47. a), d)
 48. a)
 49. a), d), e)
 50. b), c)
 51. b), e)
 52. b), c), e)
 53. d)
 54. a), d)