b) $A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ där $2\pi r$ är cirkelns omkrets.

Om radien ändras med Δr ändras arean med omkretsen multiplicerat med Δr.

3177 Höjden stiger med 0,39 cm/min.

Lösning:

$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}(27h - 3h^2) \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot h(9-h)\frac{dh}{dt}$ ger

$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi h(9-h)}$

$h = 4{,}5$ och $\frac{dV}{dt} = 2{,}5$ ger

$\frac{dh}{dt} = \frac{2{,}5}{\pi \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5} \approx 0{,}039.$

3178 Vätskenivån sjunker med 0,35 cm/min

Lösning:

För "vattenkonen" med radien r och höjden r gäller

$V = \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{\pi r^3}{3}$

$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi r^2}{3} \cdot \frac{dr}{dt} = \pi r^2 \frac{dr}{dt}$

ger $\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi r^2}$

$\frac{dV}{dt} = -360$

$r = 18$ ger $\frac{dr}{dt} = \frac{-360}{\pi \cdot 18^2} \approx$

$\approx -0{,}35$

3203 a) $x = -2$ eller $x = 1$

b) $y''(-2) = -9 < 0$ dvs lokal maxpunkt då $x = -2$

$y''(1) = 9 > 0$ dvs lokal minpunkt då $x = 1$

c) Kontrollera att grafen har lokalt min (1; 0,5) och lokalt max (–2, 14)

3204 a) *Ledtråd:*

Visa att $y' = 2\cos 2x$ är 0 då $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{3\pi}{4}$

b) $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0$ dvs

lokal maxpunkt då $x = \frac{\pi}{4}$

$y''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 > 0$ dvs

lokal minpunkt då $x = \frac{3\pi}{4}$

c) Kontrollera att grafen har lokalt max $(\frac{\pi}{4}, 1)$ och

lokalt min $(\frac{3\pi}{4}, -1)$

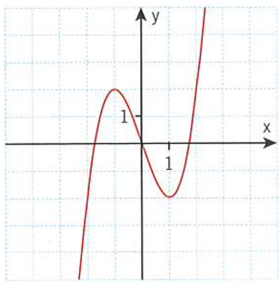
3205 a) 1, 3, 4

b) 5

c) 1, 6

d) 2, 3, 5

3206 a)



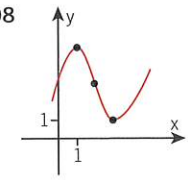
b) y är växande för $x \leq -1$ och $x \geq 1$

Ledtråd:

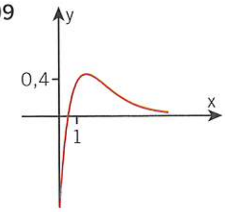
Derivata ger lokalt max (–1, 2) och lokalt min (1, –2)

3207 (1; –0,5)

3208



3209



Ledtråd:

Kurvan har lokalt max $(1{,}5;\ 2e^{-1{,}5})$

3210 a) Energiåtgången per meter minskar.

b) 6 m/s.

Ledtråd:

$y = \frac{kx^3}{x-4}$ har sitt minsta värde då $y = \frac{x^3}{x-4}$ har sitt minsta värde.

3211 a) b)

$x = 3$

ger $y_{min} = -\frac{1}{27} \approx -0{,}037$

3212 $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)$

3213 $a = 16$

Ledtråd:

$y' = \frac{2x^3 - a}{x^2}$

y' ska vara noll då $x = 2$.

Visa att $y''(2) > 0$.

3214 a) $A(v) =$

$= 144 \cdot 2 \cdot \sin v \cdot \cos v =$

$= 144 \sin 2v,\ 0 \leq v \leq \pi/2$

Ledtråd:

Höjd = $12 \sin v$

Bas = $2 \cdot 12 \cos v$

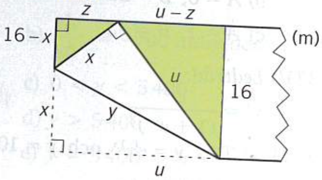
b) $A(x) = 2x\sqrt{144 - x^2}$

$0 \leq x \leq 12$

c) 144 cm² för $v = \pi/4$ och $x = \sqrt{72}$.

3215 $x = 12$ ger y_{min}

Lösning:



Pythagoras sats ger

$y^2 = x^2 + u^2$

(uppvikta triangeln)

$\begin{cases}(16-x)^2 + z^2 = x^2 \\ u^2 = (u-z)^2 + 16^2\end{cases}$

(färgade trianglarna)

$y^2 = \dfrac{2x^3}{2x-16}$, $8 < x \leq 16$

Sök minimum för y^2.

Sätt $y^2 = z$, sök minimum för z.

$z = \dfrac{2x^3}{2x-16}$, $8 < x < 16$

$z' = \dfrac{(2x-16)6x^2 - 2x^3 \cdot 2}{(2x-16)^2} =$

$= \dfrac{12x^3 - 96x^2 - 4x^3}{(2x-16)^2} =$

$= \dfrac{8x^3 - 96x^2}{(2x-16)^2} = \dfrac{8x^2(x-12)}{(2x-16)^2}$

$z' = 0$ för $x = 12$ i intervallet.

Teckenstudium av z' ger att det blir minimum.

3219 a) 11

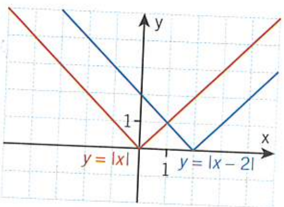
b) – 9

c) 4,92

3220 a) $f(3) = 1$, $f(-3) = 5$

b) $x = 9$ eller $x = -5$

3221 a)



b) Kontrollera graferna med din grafräknare.
Använd t ex $y = \text{abs}(x)$

3222 Fiona har fel.

Motivering:

$|0| = 0$ är inte ett positivt tal men $x \neq 0$ ger $|x| > 0$.

3223 a) A

Motivering:

$\dfrac{1}{x+2}$ är inte definierat då $x = -2$

b) A – största och minsta värde saknas.
B – största värde saknas, minsta värde är 2.

Motivering:

A – växer resp avtar obegränsat när x närmar sig – 2.
B – saknar största värde då $(x+2)^2$ kan bli hur stort som helst. Minsta värde är 2 då $(x+2)^2$ är noll.

3224 a) $x = 5$

b) *Kommentar:*
Många räknare har begränsad upplösning varför graferna kan bli konstiga när man zoomar ut.

3225 a) T ex $y = 1/(x-2)$

b) T ex $y = \sqrt{x-2}$

c) T ex $y = |x-2|$

3226 $y = |0{,}5x + 5|$

Ledtråd:

Bestäm linjens ekvation för $x > -10$.

3227 a) Definitionsmängd: $x > -2$
Värdemängd: Alla reella tal y.

b) *Förklaring:*
$y = \ln(x+2) \Leftrightarrow e^y = x + 2$
$x \leq -2$ ger att $\ln(x+2)$ ej är definierat eftersom $e^y > 0$. Om x närmar sig -2 kan y, som motsvarar en exponent, bli hur litet som helst, t ex e^{-100} är ett litet positivt tal. När x ökar växer y först snabbt och sedan långsammare, t ex $e^2 \approx 7{,}4$, $e^3 \approx 20$, $e^4 \approx 55$

3228 *Motivering:*

Både $|x-y|$ och $|y-x|$ ger avståndet mellan de reella talen x och y.

3229 $a = -2$, $b = 4$

Ledtråd:

$x = 0$ ger skärningen med y-axeln.

3230 $a = 4$, $b = 1$ och $c = 2$

3231 $a = 4/3$

Ledtråd:

Min.värde –2 ger att triangelns bas är 3. Bestäm linjens lutning.

3234 a) x-axeln

b) $x = -1$ och x-axeln

c) y-axeln och $y = 0{,}5x$

d) $x = \pi/2$

3235 a) y-axeln

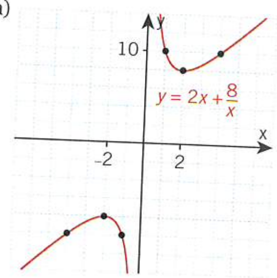
b) y-axeln och $y = -1{,}5x$

c) $y = -1$

3236 *Förklaring:*

En asymptot är en rät linje som grafen närmar sig när avståndet till origo ökar. T ex $y = e^{-x}$ närmar sig x-axeln när x ökar. x-axeln ($y = 0$) är en asymptot.

3237 a)



Lokalt max: $(-2, -8)$
Lokalt min: $(2, 8)$

b) Ja, y-axeln och $y = 2x$

c) Nej, när x närmar sig 0 från höger växer y obegränsat

3238 a) För stora $|x|$ dominerar $3x$, $y = 3x$ är en asymptot.
För små $|x|$ dominerar $\dfrac{1}{x}$, y-axeln är en asymptot.