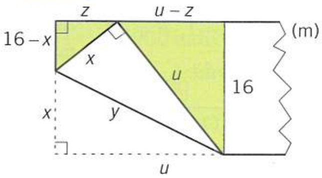
3215 $x = 12$ ger $y_{\min}$

Lösning:



Pythagoras sats ger

$y^2 = x^2 + u^2$

(uppvikta triangeln)

$$\begin{cases} (16-x)^2 + z^2 = x^2 \\ u^2 = (u-z)^2 + 16^2 \end{cases}$$

(färgade trianglarna)

$$y^2 = \frac{2x^3}{2x-16},\quad 8 < x \leq 16$$

Sök minimum för y^2.

Sätt $y^2 = z$, sök minimum för z.

$$z = \frac{2x^3}{2x-16},\quad 8 < x < 16$$

$$z' = \frac{(2x-16)6x^2 - 2x^3 \cdot 2}{(2x-16)^2} =$$

$$= \frac{12x^3 - 96x^2 - 4x^3}{(2x-16)^2} =$$

$$= \frac{8x^3 - 96x^2}{(2x-16)^2} = \frac{8x^2(x-12)}{(2x-16)^2}$$

$z' = 0$ för $x = 12$ i intervallet.

Teckenstudium av z' ger att det blir minimum.

3219 a) 11

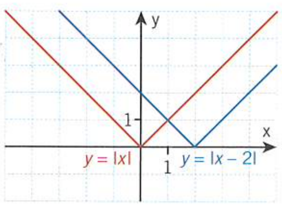
b) –9

c) 4,92

3220 a) $f(3) = 1$, $f(-3) = 5$

b) $x = 9$ eller $x = -5$

3221 a)



b) Kontrollera graferna med din grafräknare. Använd t ex $y = \text{abs}(x)$

3222 Fiona har fel.

Motivering:

$|0| = 0$ är inte ett positivt tal men $x \neq 0$ ger $|x| > 0$.

3223 a) A

Motivering:

$\dfrac{1}{x+2}$ är inte definierat då $x = -2$

b) A – största och minsta värde saknas.

B – största värde saknas, minsta värde är 2.

Motivering:

A – växer resp avtar obegränsat när x närmar sig –2.

B – saknar största värde då $(x+2)^2$ kan bli hur stort som helst. Minsta värde är 2 då $(x+2)^2$ är noll.

3224 a) $x = 5$

b) *Kommentar:*

Många räknare har begränsad upplösning varför graferna kan bli konstiga när man zoomar ut.

3225 a) T ex $y = 1/(x-2)$

b) T ex $y = \sqrt{x-2}$

c) T ex $y = |x-2|$

3226 $y = |0{,}5x + 5|$

Ledtråd:

Bestäm linjens ekvation för $x > -10$.

3227 a) Definitionsmängd: $x > -2$

Värdemängd: Alla reella tal y.

b) *Förklaring:*

$y = \ln(x+2) \Leftrightarrow e^y = x + 2$

$x \leq -2$ ger att $\ln(x+2)$ ej är definierat eftersom $e^y > 0$. Om x närmar sig –2 kan y, som motsvarar en exponent, bli hur litet som helst, t ex e^{-100} är ett litet positivt tal. När x ökar växer y först snabbt och sedan långsammare, t ex $e^2 \approx 7{,}4$, $e^3 \approx 20$, $e^4 \approx 55$

3228 *Motivering:*

Både $|x-y|$ och $|y-x|$ ger avståndet mellan de reella talen x och y.

3229 $a = -2$, $b = 4$

Ledtråd:

$x = 0$ ger skärningen med y-axeln.

3230 $a = 4$, $b = 1$ och $c = 2$

3231 $a = 4/3$

Ledtråd:

Min.värde –2 ger att triangelns bas är 3. Bestäm linjens lutning.

3234 a) x-axeln

b) $x = -1$ och x-axeln

c) y-axeln och $y = 0{,}5x$

d) $x = \pi/2$

3235 a) y-axeln

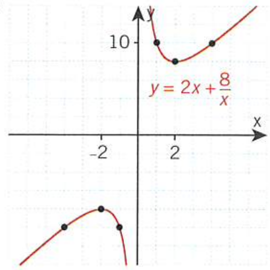
b) y-axeln och $y = -1{,}5x$

c) $y = -1$

3236 *Förklaring:*

En asymptot är en rät linje som grafen närmar sig när avståndet till origo ökar. T ex $y = e^{-x}$ närmar sig x-axeln när x ökar. x-axeln ($y = 0$) är en asymptot.

3237 a)



Lokalt max: (–2, –8)

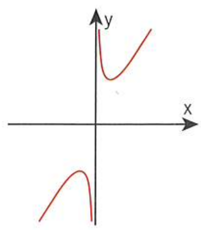
Lokalt min: (2, 8)

b) Ja, y-axeln och $y = 2x$

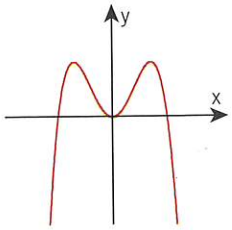
c) Nej, när x närmar sig 0 från höger växer y obegränsat

3238 a) För stora $|x|$ dominerar $3x$, $y = 3x$ är en asymptot.

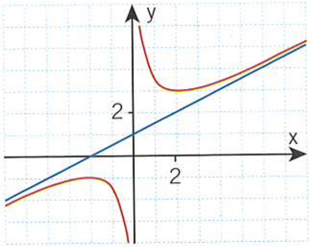
För små $|x|$ dominerar $\dfrac{1}{x}$, y-axeln är en asymptot.



b) För stora $|x|$ dominerar $-x^4$
För små $|x|$ dominerar $4x^2$



3239



Lokalt max: $(-2, -1)$
Lokalt min: $(2, 3)$

Asymptoter: y-axeln och $y = 0{,}5x + 1$

3240 a) Extrempunkter saknas eftersom derivatan saknar nollställen.
Asymptoter: x- och y-axeln

b) Lokalt max: $(0{,}5; -4)$
Asymptoter: x- och y-axeln, $x = 1$

3241 a) y-axeln och $y = -x$

b) $y = \dfrac{1}{x} - x$

3242 Nej, Johan har fel.
Motivering:
$y = \sin x + x$ har $y = x$ som "mittlinje", dvs grafen varierar kring denna men närmar sig inte mer och mer när x ökar.

3243 $y = \tan^{-1}x$ har asymptoterna $y = \pi/2$ och $y = -\pi/2$
Motivering:
När x ökar närmar sig $\tan^{-1}x$ värdet $\pi/2$ eftersom $\tan x$ ökar obegränsat när x närmar sig $\pi/2$. På motsvarande sätt närmar sig $\tan^{-1}x$ värdet $-\pi/2$ när $x \to -\infty$.

3244 a) T ex $y = e^{-x} + 2$ eller $y = 2 + 1/x$

b) T ex $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} + x$

3245 Grafen har lokalt max: $(0, 1/4)$ och asymptoter $x = \pm 2$ och $y = 1$.
Ledtråd:
$y'(0) = 0, y''(0) < 0$
Undersök för vilka x uttrycket inte är definierat samt vilket värde y närmar sig när $|x|$ blir stort.

3302 a) *Lösning:*
$y = 5 \cdot e^{2x}$ ger $y' = 10 \cdot e^{2x}$
$VL = y' - 2y =$
$= 10 \cdot e^{2x} - 2 \cdot 5 \cdot e^{2x} = 0 = HL$

b) *Lösning:*
$y = 4\cos x,\ y' = -4\sin x,$
$y'' = -4\cos x$
$VL = y'' + y =$
$= -4\cos x + 4\cos x = 0$
$= HL$

3303 T ex $y'' + y' + y = 0$

3304 a) *Lösning:*
$VL = \dfrac{dy}{dx} = A \cdot k \cdot e^{kx}$
$HL = ky = k \cdot A \cdot e^{kx} = VL$

b) $y(0) = A \cdot e^{k \cdot 0} = A$

3305 Nej.
Motivering:
$y = x \cdot e^x,\ y' = x \cdot e^x + e^x$
$VL =$
$y' - y = x \cdot e^x + e^x - x \cdot e^x = e^x$
$HL = xy = x \cdot x \cdot e^x = x^2 \cdot e^x$
$VL \neq HL$

3306 $A = 12,\ k = -0{,}03$

3307 $k = 3$
Lösning:
$y = \cos kx$ där $k > 0$
$y' = -k\sin kx$
$y'' = -k^2\cos kx$
$y'' + 9y = 0$ ger
$-k^2\cos kx + 9\cos kx = 0$
$\cos kx\,(9 - k^2) = 0$
$9 - k^2 = 0$
$k^2 = 9$
$k = 3,\ k > 0$

3308 $r = 2$ eller $r = -3$
Ledtråd:
$y = e^{rx}$ är en lösning om $r^2 + r - 6 = 0$

3309 a) –

b) $A = 0,\ B = 20$

c) $A = 1,\ B = -3$

3310 *Ledtråd:*
$y' = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$

3311 a) T ex $y = e^{0{,}1x}$ och $y = 10e^{0{,}1x}$

b) *Kommentar:*
$y = C_1 e^{0{,}1x} + C_2 e^{0{,}1x}$ är en lösning för alla värden på C_1 och C_2.

3314 a) *Lösning:*
$y = 150 \cdot e^{-0{,}20t}$ ger
$y(0) = 150 \cdot e^{-0{,}20 \cdot 0} = 150$

b) *Lösning:*
$VL =$
$= \dfrac{dy}{dt} = 150 \cdot (-0{,}20) \cdot e^{-0{,}20t}$
$HL = -0{,}20y =$
$= (-0{,}20) \cdot 150 \cdot e^{-0{,}20t} =$
$= VL$

3315 a) År 2010 var folkmängden 45 miljoner.

b) Folkmängden ökar med en hastighet som är 1,2 % av folkmängden.

3316 a) $k = 0{,}15$

b) Ca 33 000 st
Ledtråd:
Beräkna $y(8)$.

3317 a) –

b) $C = 44\,000$

3318 a) $y' = -0{,}20y$

b) $y' = ky,\ k > 0$

c) $y' = k(20 - y),\ k > 0$

3319 *Lösning:*
$s = v_0t + at^2/2$
$s' = v_0 + at$
$s'' = a$

3320 a) $A = -4$

b) Lövmängden närmar sig $4\ g/cm^2$.

3321 a) –

b) Begynnelsevärdet, dvs mängden föroreningar vid $t = 0$.

c) Den tid det tar innan mängden föroreningar är en tiondel av begynnelsevärdet.