3119 a) $y' = x \cdot \cos x + \sin x$

b) $y' =$
$= x^2 \cdot (-3\sin 3x) + 2x \cdot \cos 3x =$
$= 2x\cos 3x - 3x^2 \sin 3x$

3120 a) $y' = 6x^2 + 2x + 6$
Ledtråd:
$y' = (1 + 2x) \cdot 2x + 2 \cdot (3 + x^2)$

b) $y' = 6x^2 + 2x + 6'$
Ledtråd:
$y = 2x^3 + x^2 + 6x + 3$

3121 a) $y' = -2\sin x$

b) $y' = -2\sin x$

c) *Kommentar:*
Produktregeln måste vi använda när vi har en produkt av funktioner som beror av t ex x. Är den ena faktorn en konstant så är det enklare att använda sambandet i a).

3122 a) $y' = 2\sin x \cos x$

b) $y' = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x =$
$= 2\sin x \cos x$

3123 a) $y' = 5e^{2x}$
Lösning:
$y' = e^{2x} \cdot 3e^{2x} + 2e^{2x} \cdot e^{3x} =$
$= 5e^{5x}$

b) $y' = 5e^{5x}$
Ledtråd:
$y = e^{5x}$

3124 Petter har rätt.
Motivering:
Derivatan är en summa. En summa förändras inte om ordningen på termerna ändras.

3125 a) $y' = x \cdot \cos x$

b) $y' = -2x\sin x$

3126 a) $x = -1$
Ledtråd:
Faktorisering av derivatan ger $e^x(x + 1) = 0$ och $e^x > 0$ för alla x.

b) $x = 0$ eller $x = -1/2$

3127 a) $h'(3) = 28$
Ledtråd:
$h'(3) = f'(3) + g'(3)$

b) $h'(3) = 193$
Ledtråd:
$h'(3) = f(3) \cdot g'(3) + f'(3) \cdot g(3)$

3128 $f'(4) = 6{,}5$
Ledtråd:
$f'(4) = \sqrt{4} \cdot g'(4) + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot g(4)$

3129 a) $A'(t) = 8\cos 2t +$
$8\cos t \cos 2t - 6\sin t -$
$4\sin t \sin 2t$

b) $A'(5) \approx -4{,}95$
Efter 5 sekunder minskar arean med 5 m^2/s.

3130 $x \cdot e^x$

3131 a) $y' = x^2 \cdot \cos^3 x - x^3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x$

b) $y' = 2x \cdot (\sin x \cdot 2e^{2x} +$
$+ \cos x \cdot e^{2x}) + 2 \cdot \sin x \cdot e^{2x} =$
$= 2e^{2x}(2x \cdot \sin x + x \cdot \cos x +$
$+ \sin x)$
Ledtråd:
Använd produktregeln i produktregeln.

3132 a) fg
Lösning:
$$\frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} =$$
$$= \frac{f^2 + g^2 + 2fg - f^2 - g^2 + 2fg}{4} =$$
$$= fg$$

b) *Lösning:*
$$y = fg =$$
$$\frac{(f+g)^2}{4} - \frac{(f-g)^2}{4}$$
Kedjeregeln ger: $y' =$
$$= \frac{2(f+g)(f'+g')}{4} -$$
$$\frac{2(f-g)(f'-g')}{4} =$$
$$= \frac{2(ff' + fg' + gf' + gg')}{4} -$$
$$\frac{2(ff' - fg' - gf' + gg')}{4} =$$
$$= \frac{4fg' + 4f'g}{4} = fg' + f'g$$

3133 *Lösning:*
$f'(gh) + f(g'h + gh') =$
$= f'gh + fg'h + fgh'$

3134 a) $\Delta V = \Delta f \cdot gh + f \cdot \Delta g \cdot h +$
$+ fg \cdot \Delta h + f\Delta g\Delta h + \Delta f\Delta g \cdot$
$\cdot h + \Delta fg\Delta h + \Delta f\Delta g\Delta h$
Ledtråd:
$\Delta V = (f + \Delta f) \cdot$
$\cdot (g + \Delta g) \cdot (h + \Delta h) - fgh$

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = f'gh + fg'h + fgh'$
Ledtråd:
Ställ upp differenskvoten $\Delta V/\Delta x$ och bestäm de olika termernas gränsvärde. Jämför med metod 2 på sidan 105.

Historik: Leibniz och produktregeln

1 a) $f'(x) = 2x$
$u' \cdot v' = 2x \cdot 0 = 0$

b) $f'(x) = 5x^4$
$u' \cdot v' = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$

c) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$
$u' \cdot v' = 1 \cdot 2x = 2x$

2 a) Produktregeln ger derivatan:
$(cx + d) \cdot (2x + b) + c(x^2 + bx) =$
$= 3cx^2 + (2bc + 2d)x + bd$
Parentesmultiplikation ger:
$cx^3 + (bc + d)x^2 + bdx$
vars derivata är:
$3cx^2 + (2bc + 2d)x + bd$

3 Om u och v är konstanter blir derivatan i båda fallen 0.

3136 a) $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

b) $f'(x) = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} =$
$= -\frac{\sin x \cdot x + \cos x}{x^2}$

3137 a) $f'(x) = \frac{\cos 2x \cdot 2x - \sin 2x}{x^2}$

b) $f'(x) =$
$= \frac{-\sin 2x \cdot 2 \cdot e^{2x} - \cos 2x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} =$
$= -\frac{2\sin 2x + 2\cos 2x}{e^{2x}}$